

Instabilität magnetischer Flußröhren in solaren Eruptionen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
in der Wissenschaftsdisziplin Astrophysik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Potsdam

von
Tibor Török
geboren am 18.05.1967 in Stuttgart

Potsdam, im Juli 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Solare Eruptionen	5
1.2	Modelle solarer Eruptionen	9
1.2.1	Verscherung magnetischer Arkaden	11
1.2.2	Magnetischer Ausbruch	12
1.2.3	Instabilität magnetischer Flußröhren	12
1.2.4	Tether Cutting	15
1.3	Motivation für die Wahl der Simulationsmodelle	16
2	Magnetohydrodynamische Grundlagen	18
2.1	Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik	18
2.2	Magnetische Flußröhren	22
2.3	Kink-Instabilität zylindersymmetrischer Flußröhren	23
2.4	Instabilität bogenförmiger Flußröhren	27
3	Entwicklung koronaler magnetischer Flußröhren unter dem Einfluß photosphärischer Wirbelbewegungen	29
3.1	Einführung	29
3.2	Simulationsmodell	30
3.2.1	Anfangsbedingungen	31
3.2.2	Aufprägung der Wirbelbewegungen	33
3.2.3	Numerische Implementation	34
3.3	Quasi-statische und dynamische Entwicklung	36
3.3.1	Referenzsimulation	36
3.3.2	Parameterstudie	43
3.3.3	Relaxation	47
3.4	Vergleich mit Beobachtungen	55
3.4.1	Eruption der Flußröhre	55
3.4.2	Magnetflußexpansion und Dreifachstruktur von CMEs	55
3.4.3	Ausbildung sigmoidaler Flußröhren	56
3.5	Zusammenfassung und Bewertung	58
4	Kink-Instabilität koronaler magnetischer Flußröhren	61
4.1	Einführung	61
4.2	Numerische Methode	63
4.3	Kink-Instabilität der Flußröhre	66
4.4	Zusammenfassung und Bewertung	73
5	Vergleich der Simulationen des TD-Gleichgewichts mit der Beobachtung solarer Eruptionen	75
5.1	Transiente Sigmoidale	75

5.2	Instabile Protuberanzen	77
5.3	Beschleunigung von CMEs	86
6	Zusammenfassung und Ausblick	91
A	Numerisches Verfahren	94
A.1	Festlegung des nicht-äquidistanten Gitters	94
A.2	Flußerhaltende Form der Bewegungsgleichungen	95
A.3	Lax-Wendroff-Verfahren	97
A.4	Wahl des Zeitschrittes	98
A.5	Randbedingungen	98
A.6	Numerische Diffusion	99
B	Publikationen	101

1 Einleitung

Großskalige solare Eruptionen sind die gewaltigsten Energieumwandlungsvorgänge in unserem Sonnensystem. Sie sind in der Sonnenatmosphäre als (eruptive) *Flares*, ausbrechende *Protuberanzen* (*Filamente*) und *koronale Massenauswürfe* (engl. Coronal Mass Ejections, CMEs) beobachtbar. In den größten Eruptionen werden Energiemengen von bis zu 10^{25} *Joule* umgewandelt und bis zu 10^{13} *kg* solaren Plasmas in den interplanetaren Raum geschleudert. Ereignisse dieser Art sind von einem Schwarm hochenergetischer Teilchen mit Energien bis zu 20 *GeV* begleitet. Die Wechselwirkung der ausgestoßenen magnetischen Plasmawolken mit der Magnetosphäre der Erde kann, unter anderem, zur Beschädigung von Satelliten, zur Störung von Telekommunikations- und Navigationssystemen sowie zur Gefährdung ungeschützter Astronauten führen.¹ Das Verständnis der Physik, die solaren Eruptionen zugrunde liegt, ist deshalb nicht nur von wissenschaftlichem, sondern auch von sozio-ökonomischem Interesse. Die Relevanz solarer Eruptionen erstreckt sich auch auf andere Teilbereiche der Astrophysik. So werden z. B. in magnetischen Flaresternen und galaktischen Akkretionsscheiben-Jet-Systemen identische physikalische Prozesse beobachtet bzw. vermutet.

Die vorliegende Arbeit untersucht die Auslösungsmechanismen und die dynamische Entwicklung solarer Eruptionen mittels numerischer Simulationen von magnetohydrodynamischen Modellen koronaler *magnetischer Flußröhren*. Es wird untersucht, wie sich die Verdrillung einer magnetischen Flußröhre auf ihre Stabilität auswirkt. Beobachtungsergebnisse legen nahe, daß verdrillten magnetischen Flußröhren eine entscheidende Rolle in solaren Eruptionen zukommt. Instabile Strukturen in der Sonnenkorona, wie z. B. ausbrechende Protuberanzen und CMEs, weisen oftmals deutliche Anzeichen von Verdrillung auf [1, 2]. Überschreitet die Verdrillung einer magnetischen Flußröhre einen kritischen Wert, so tritt die *Kink-Instabilität* (Knickinstabilität) auf. Dieser Effekt wurde bislang von der Mehrheit der Autoren lediglich als mögliche Erklärung sogenannter kompakter (nicht eruptiver) Flares angesehen (siehe z. B. [3]). In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß die Kink-Instabilität koronaler magnetischer Flußröhren auch als Auslösungsmechanismus großskaliger solarer Eruptionen in Frage kommt.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt. In diesem einleitenden Kapitel wird auf die verschiedenen Erscheinungsformen solarer Eruptionen sowie auf die wichtigsten theoretischen Ansätze für ihre Modellierung eingegangen. Im darauf folgenden theoretischen Grundlagenkapitel werden die Grundgleichungen der *Magnetohydrodynamik* (MHD) eingeführt sowie magnetische Flußröhren und die Kink-Instabilität beschrieben.

In Kapitel 3 wird das wesentliche Charakteristikum von CMEs, der Ausstoß von Plasma aus der Sonnenkorona und die damit verbundene großskalige Öffnung magnetischer Feldlinien in den interplanetaren Raum, untersucht. Als Anfangsbedingung der numerischen Simulationen dient ein stark vereinfachtes Modell einer aktiven Region, bestehend aus zwei Sonnenflecken mit darüber liegendem geschlossenem magnetischen Fluß. Das anfäng-

¹Der Einfluß solarer Eruptionen auf die Erde ist einer der Hauptschwerpunkte in den Forschungen zum *Weltraumwetter* (engl. Space Weather).

liche magnetische Potentialfeld wird durch regelmäßige photosphärische Wirbelbewegungen verdrillt, was zur Ausbildung einer verdrillten stromführenden Flußröhre führt. Bei ausreichender Verdrillung verliert die Flußröhre ihre Stabilität und es setzt ein rasches Aufsteigen des magnetischen Flusses, wie bei CMEs beobachtbar, ein. Die auftretende Instabilität wird zum ersten Mal für ein solches System mit der Kink-Instabilität in Zusammenhang gebracht. Ferner werden erstmalig eine detaillierte Studie der Abhängigkeit eines solchen Systems von Parametern wie der anfänglichen Verteilung der Plasmadichte, der aufgeprägten Wirbelgeschwindigkeit und des Abstandes der Wirbel vorgelegt sowie der Wert der kritischen Verdrillung, bei der das Aufsteigen des magnetischen Flusses einsetzt, angegeben. Des weiteren wird auf die oftmals in CMEs beobachtbare Dreifachstruktur, bestehend aus einem kompakten dichten Kern, einem diesen umgebenden Bereich geringer Dichte und einer diffusen äußeren bogenförmigen Struktur wiederum erhöhter Dichte, eingegangen. Schließlich wird die während der Entwicklung des Systems auftretende helische Verformung der Flußröhre mit sigmoidalen (S-förmigen) Strukturen, die in der Korona in aktiven Regionen beobachtet werden können, in Zusammenhang gebracht.

In Kapitel 4 wird ein alternativer Zugang gewählt. Es wird ein Modell betrachtet, das bereits zu Beginn der Simulation eine verdrillte Flußröhre enthält. Die Stärke der Verdrillung läßt sich vorgeben, so daß das Aufprägen von Wirbelbewegungen unnötig wird. Das Modell bestätigt wichtige Aspekte aus Kapitel 3, wie z. B. das Einsetzen der Kink-Instabilität der Flußröhre beim Überschreiten einer kritischen Verdrillung und ihre damit einhergehende helische Verformung. Darüber hinausgehend liefert es Erkenntnisse über Strukturen, die sich während der Instabilität ausbilden, wie z. B. eine vertikale Stromschicht unterhalb der aufsteigenden Flußröhre, sowie über weitere Aspekte der Dynamik, wie z. B. den Aufstieg der Flußröhre bei ruhendem Umgebungsfeld. Des weiteren ist das Modell für eine detaillierte Untersuchung der Kink-Instabilität besser geeignet als das in Kapitel 3 betrachtete. Untersuchungen der Kink-Instabilität wurden bislang lediglich an geraden Flußröhren (die als vereinfachtes Modell der bogenförmigen koronalen Flußröhren verwendet werden) durchgeführt. Hier werden erstmalig Schwellwerte für das Einsetzen der Kink-Instabilität sowie Wachstumsraten der Instabilität für bogenförmige magnetische Flußröhren angegeben.

In Kapitel 5 werden die in Kapitel 4 gewonnenen Ergebnisse mit Beobachtungen solarer Eruptionen verglichen. Zunächst wird gezeigt, daß *transiente Sigmoide*, die in der Anfangsphase solarer Eruptionen als vorübergehende Aufhellung der Röntgenemission beobachtet werden, nicht (wie bislang überwiegend angenommen) als instabile magnetische Flußröhren angesehen werden können. Vielmehr handelt es sich bei ihnen um Gruppen von magnetischen Feldlinien, die die unterhalb der aufsteigenden Flußröhre entstehende vertikale Stromschicht durchlaufen. Die beobachtete Aufhellung ist auf erhöhte Dissipation in der vertikalen Stromschicht aufgrund *magnetischer Rekonnexion* (der Neuverbindung magnetischer Feldlinien in räumlich lokalisierten Gebieten nichtverschwindender elektrischer Leitfähigkeit) zurückzuführen. Anschließend wird auf die Aufstiegscharakteristik und die Morphologie instabiler Protuberanzen eingegangen. Zwei in der Literatur detailliert beschriebene Beobachtungen [4, 5] werden diesbezüglich mit Modellrechnungen verglichen.

Sowohl der Höhen-Zeit-Verlauf als auch die helische Verformung der beobachteten Protuberanzen lassen sich mit Hilfe der Simulationen in ausgezeichneter qualitativer Übereinstimmung reproduzieren, woraus in beiden Fällen auf das Auftreten der Kink-Instabilität geschlossen werden kann. Des Weiteren wird in diesem Zusammenhang erstmalig die zeitliche Entwicklung der Verdrillung magnetischer Flußröhren mit Beobachtungsergebnissen verglichen. Schließlich wird nach einer Modifikation des in Kapitel 4 betrachteten Modells die Aufstiegscharakteristik der kink-instabilen Flußröhre mit der bislang am detailliertesten beobachteten Aufstiegscharakteristik einer solaren Eruption [6] verglichen. Die dabei gefundene ausgezeichnete qualitative Übereinstimmung der Simulation mit der Beobachtung läßt Rückschlüsse über die bislang unbekanntes Beschleunigungsmechanismen koronaler Massenauswürfe zu.

Das abschließende Kapitel enthält eine Zusammenfassung der Ergebnisse und einen Ausblick auf mögliche weiterführende Untersuchungen.

1.1 Solare Eruptionen

Großskalige solare Eruptionen treten bevorzugt in aktiven Regionen – magnetisch geschlossenen Gebieten oberhalb von Sonnenfleckengruppen – auf, also hauptsächlich während der Aktivitätsmaxima des Sonnenzyklus. Die Zeitskalen solcher Ereignisse betragen Minuten bis hin zu einigen Stunden, die Längenskalen sind zunächst vergleichbar mit der Größe der Sonnenfleckengruppe, können jedoch im weiteren Verlauf der Eruption den Sonnendurchmesser weit übertreffen (Abb. 1). Im folgenden seien die drei Erscheinungsformen großskaliger solarer Eruptionen kurz vorgestellt.

Flares sind das am intensivsten erforschte Phänomen. Besonders energiereiche Flares sind im sichtbaren Licht als kurzzeitige Aufhellung eines kleinen Teiles der Sonnenoberfläche wahrnehmbar. Es handelt sich bei ihnen um eine plötzliche, eruptive Energiefreisetzung in der Sonnenatmosphäre, die sich hauptsächlich in Teilchenbeschleunigung und lokaler Heizung niederschlägt und die sich im Bereich des gesamten elektromagnetischen Spektrums, überwiegend jedoch im Röntgen- und UV-Gebiet, beobachten läßt. Ausstoß von Plasma aus der Sonnenatmosphäre ist nur bei sehr energiereichen Flares zu beobachten.

Protuberanzen oder **Filamente** sind längliche brückenförmige Gebilde in der Sonnenatmosphäre, die etwa hundertmal dichter und kühler sind als die sie umgebende Korona. Sie bilden sich entlang sogenannter magnetischer Neutrallinien, die große Gebiete entgegengesetzter Polarität der vertikalen Feldkomponente in der Photosphäre trennen. Das dichte Plasma wird offenbar von Magnetfeldern entgegen der Gravitation auf Höhen, die das Zehnfache des Erddurchmessers übertreffen können, gehalten und gegenüber der umgebenden Korona thermisch isoliert. Protuberanzen können sich fast über die halbe Sonnenscheibe erstrecken und weisen oftmals eine verdrillte Struktur auf. Sie zählen zu den langlebigsten Objekten auf der Sonne und können mitunter über Monate hinweg beobachtet werden, bevor sie ohne jegliche vorhergehende Anzeichen innerhalb von $\sim 1h$ ausbrechen. Dabei wird das ganze Gebilde durch die Korona hindurch nach oben geschleudert, wobei die ausbrechende Materie Geschwindigkeiten von mehreren $100 km/s$

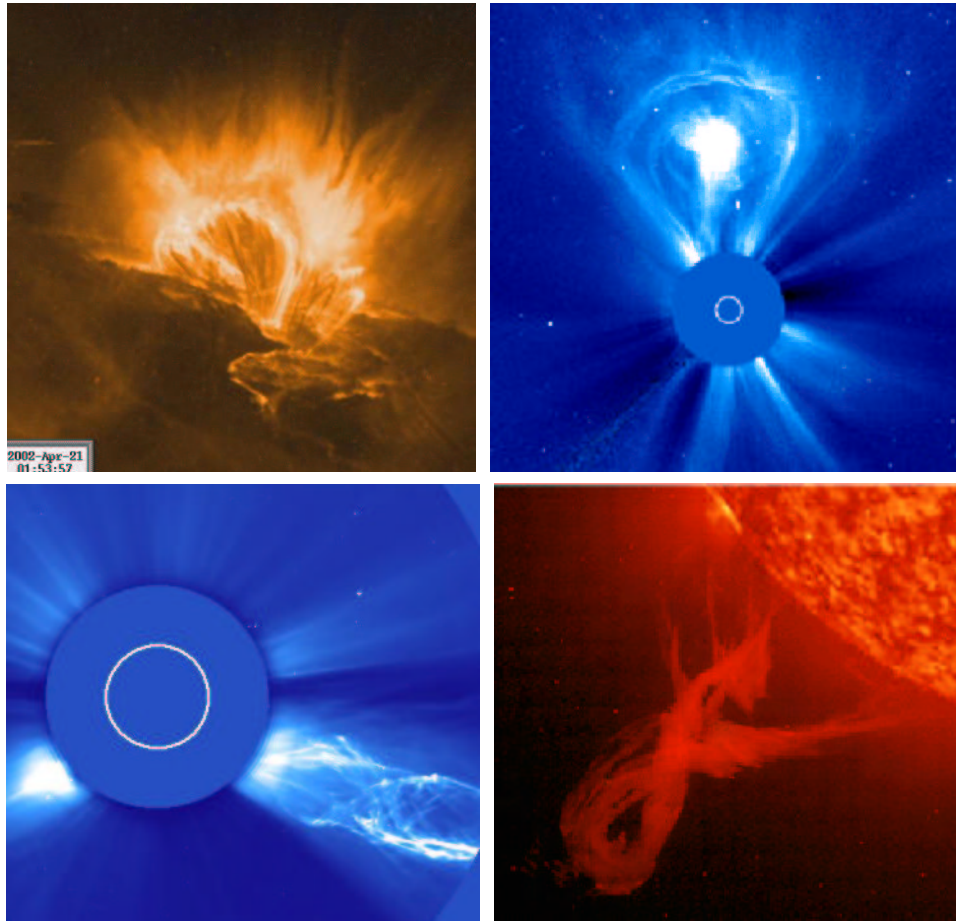


Abbildung 1: Beispiele solarer Eruptionen, aufgenommen im Zeitraum 1998-2002, während des jüngsten Aktivitätsmaximums. *Oben links*: EUV-Beobachtung eines Zwei-Bänder-Flares durch den Satelliten TRACE (<http://vestige.lmsal.com/TRACE>). *Oben rechts*: CME, mit Hilfe des an Bord des Satelliten SOHO (<http://sohowww.nascom.nasa.gov>) befindlichen LASCO/C3 Koronagraphen beobachtet. *Unten links*: CME-Kern, mit Hilfe des LASCO/C2 Koronagraphen beobachtet. *Unten rechts*: Ausbrechende Protuberanz. Die Aufnahme wurde mit dem auf SOHO befindlichen EUV-Teleskop EIT gewonnen.

erreicht. Solche Ausbrüche entwickeln sich, von wenigen Ausnahmen abgesehen, stets zu einem CME. Die deutlich kleineren Protuberanzen, die in aktiven Regionen existieren, können ebenfalls ausbrechen, im allgemeinen in Verbindung mit einem Flare, sind jedoch schwieriger zu beobachten.

CMEs sind im wesentlichen durch den Ausstoß von Plasma aus der Korona und die damit verbundene großskalige Öffnung magnetischer Feldlinien in den interplanetaren Raum gekennzeichnet. Ihre Häufigkeit schwankt von ca. zwei Ereignissen pro Woche während des Minimums der Sonnenaktivität bis hin zu ein bis zwei Ereignissen pro Tag während des Maximums. Obwohl ihre Ausdehnung ein Vielfaches des Sonnendurchmessers erreicht,

wurden sie erst in den siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts im Rahmen der SKYLAB Mission entdeckt. Sie sind in der optisch dünnen Korona nur mit Hilfe von speziellen Instrumenten (*Koronagraphen*) beobachtbar, bei denen die die Korona überstrahlende Sonnenscheibe wie bei einer Sonnenfinsternis abgedeckt wird. Die ausgeworfene Struktur kann dann mittels des von ihr gestreuten Lichts aus der Photosphäre beobachtet werden. In nahezu der Hälfte aller Fälle beobachtet man eine typische Dreifachstruktur in CMEs: einen Bogen erhöhter Plasmadichte an der Vorderfront, ein dahinter liegendes Gebiet verringerter Dichte, sowie oftmals eine darin eingelagerte, häufig deutlich verdrillte ausbrechende Protuberanz. Es werden jedoch auch CMEs mit komplexerer Struktur beobachtet. Da man mit den gegenwärtigen Instrumenten lediglich ein zweidimensionales Abbild von CMEs erhalten kann, ist deren genaue dreidimensionale Struktur nur unzureichend bekannt. Dies wird sich durch die geplante STEREO Mission von zwei mit Koronagraphen ausgestatteten Satelliten deutlich verbessern. CMEs können Geschwindigkeiten von über 2000 km/s erreichen. Inzwischen weiß man, daß sie ein wesentliches höheres Potential als Flares besitzen, signifikante geomagnetische Störungen hervorzurufen. Deshalb stehen sie heute im Mittelpunkt des Interesses in den Forschungen zum Weltraumwetter.

Das Verständnis solarer Eruptionen wird durch die Tatsache erschwert, daß die beschriebenen Erscheinungsformen sowohl einzeln als auch gekoppelt auftreten können. Während noch bis vor wenigen Jahren heftig darüber diskutiert wurde, welches der drei Phänomene ursächlich für die anderen beiden ist, geht man heute davon aus, daß sie die charakteristischen Erscheinungsformen ein und desselben physikalischen Prozesses darstellen, der sich in der Instabilität des koronalen Magnetfeldes manifestiert. Je nach der Beschaffenheit des Quellgebietes der Eruption prägen sich die Erscheinungsformen unterschiedlich deutlich aus. Neuere Messungen mit Instrumenten auf dem SOHO-Satelliten haben den direkten Zusammenhang der drei Phänomene in einer Reihe von Ereignissen, in denen alle drei Komponenten gut beobachtet werden konnten, zweifelsfrei nachgewiesen [7, 8].

Die größten solaren Eruptionen (*Zwei-Bänder-Flares*, engl. Two-Ribbon Flares oder Long Duration Events, LDEs), in denen in der Regel alle drei Phänomene beobachtbar sind, finden ausschließlich in aktiven Regionen statt. Sie beginnen im allgemeinen mit dem Aufstieg einer Protuberanz, die sich im weiteren Verlauf der Eruption zu einem CME entwickelt. Nahezu zeitgleich mit dem Einsetzen des CMEs wird ein Flare beobachtet. Anschließend kommt es unterhalb der aufsteigenden Strukturen zur Ausbildung einer Arkade langsam anwachsender koronaler Magnetfeldbögen („Post-Flare-Loops“), die im weichen Röntgenlicht (engl. Soft X-Ray, SXR) und im entfernten ultravioletten Licht (EUV) beobachtbar sind, sowie zweier, sich langsam voneinander entfernender chromosphärischer Bänder, die in der roten Balmer-Linie des Wasserstoffs ($H\alpha$) an den Fußpunkten der Arkade sichtbar sind und zur Namensgebung geführt haben (Abb. 1 oben links). Es können jedoch auch sogenannte *kompakte* oder *impulsive* Flares auftreten, bei denen deutlich weniger Energie umgesetzt wird und es nicht zu einer Eruption kommt. Man nimmt an, daß in solchen Fällen der Ausstoß des Plasmas durch ein starkes, oberhalb der Flare-Region gelegenes stabiles Magnetfeld verhindert wird. Daneben kommt es auch zu Eruptionen in

Gebieten deutlich schwächerer Magnetfelder außerhalb von aktiven Regionen. Dabei handelt es sich im allgemeinen um den Ausbruch einer großen Protuberanz, die sich zu einem CME entwickelt, jedoch in der Regel nicht von einem Flare begleitet wird. Ereignisse dieser Art weisen in vielerlei Hinsicht Ähnlichkeiten mit Zwei-Bänder-Flares auf, so daß die Annahme gerechtfertigt erscheint, daß beiden Erscheinungen derselbe oder ein analoger physikalischer Mechanismus zugrunde liegt.

Solare Eruptionen sind oftmals mit sogenannten *Sigmoiden* verknüpft. Es handelt sich bei diesen um S- oder inverse S-förmige Strukturen, die in aktiven Regionen im weichen Röntgenlicht beobachtbar sind (siehe Abb. 38 oben). Die Ausrichtung der Sigmoiden weist eine hemisphärische Präferenz auf: in der nördlichen Hemisphäre der Sonne überwiegt die inverse S-Form, in der südlichen die S-Form [9]. Die sigmoidale Form dieser Strukturen wird als Anzeichen koronaler Ströme in verscherten und verdrillten Magnetfeldern angesehen. In aktiven Regionen, die Sigmoiden enthalten, werden in der Tat häufiger solare Eruptionen beobachtet als in aktiven Regionen ohne Sigmoid [10]. Sigmoiden lassen sich in zwei Klassen einteilen [11]: eine *persistente* (langlebige) Form mit einer Lebensdauer von 1-2 Tagen und einer diffusen Struktur sowie eine *transiente* (kurzlebige) Form, die kurz vor und während der Anfangsphase solarer Eruptionen als kurzfristige, scharf begrenzte Aufhellung der Röntgenemission beobachtbar ist. Transiente Sigmoiden wurden bislang von der Mehrheit der Autoren als kink-Instabilität, ausbrechende magnetische Flußröhren interpretiert (siehe z. B. [9]). In dieser Arbeit wird in Abschn. 5.1 ein neues Modell für transiente Sigmoiden vorgelegt.

Da in der Korona die magnetische Energie alle anderen Energieformen dominiert (siehe z. B. [12]), geht man davon aus, daß solare Eruptionen magnetisch angetrieben werden. Die sie auslösenden Prozesse und ihre weitere dynamische Entwicklung sind bis heute jedoch nur unzureichend verstanden. Die Beobachtungen legen einen auslösenden Prozeß in der unteren Korona nahe. Theoretische Modelle suchen in jüngster Zeit nach Erklärungen im Rahmen der idealen oder resistiven MHD. Es wird angenommen, daß eine makroskopische, im Grundsatz ideale Konfigurations-Instabilität des koronalen Magnetfeldes das plötzliche Aufsteigen koronaler Strukturen sowie eine erste impulsive Energiefreisetzung verursacht. Im weiteren Verlauf der Eruption kommt es dann zu magnetischer Rekonnexion in den aufsteigenden magnetischen Feldliniensystemen, die zu weiterer, unter Umständen viele Stunden andauernder Energiefreisetzung führt und das Aufsteigen der instabilen Strukturen weiter antreibt sowie für die Entstehung von Post-Flare-Loops und H α -Bändern verantwortlich ist (siehe z. B. [13]).

In dieser Arbeit sollen vornehmlich die auslösenden Prozesse solarer Eruptionen untersucht werden. Da sich die Anfangsphase solarer Eruptionen in aktiven Regionen (mit Flare) nicht wesentlich von der Anfangsphase in Eruptionen außerhalb aktiver Regionen (ohne Flare) unterscheiden, erscheint ein Ansatz gerechtfertigt, der sich auf die Instabilität und das plötzliche Aufsteigen koronaler Strukturen konzentriert, und von sekundären Effekten wie Teilchenbeschleunigung und lokaler Heizung, die eng mit Flares verknüpft sind, zunächst absieht. Die in der Hauptphase solarer Eruptionen in den aufsteigenden Feldliniensystemen stattfindende magnetische Rekonnexion und die auf ihr beruhenden

Erscheinungen werden im sogenannten „Standardmodell“ der Hauptphase solarer Eruptionen (CSHKP-Modell, siehe z. B. [13, 14]) beschrieben und sind ebenfalls nicht Gegenstand der vorliegenden Untersuchung.

1.2 Modelle solarer Eruptionen

Es existiert eine Vielzahl von Ansätzen zur theoretischen Beschreibung der verschiedenen Formen und Aspekte solarer Eruptionen. Die Ausführungen dieses Abschnittes behandeln Modelle, die sich im wesentlichen auf den auslösenden Prozeß und die dynamischen Entwicklung der Eruption konzentrieren. Zeitgemäße Modelle müssen die folgenden, aus der Beobachtung gewonnenen Erkenntnisse in Betracht ziehen (für die Definitionen der magnetischen Reynoldszahl, des „Plasma-Beta“ und der Alfvéngeschwindigkeit siehe Abschn. 2.1).

- Das Verhältnis von konvektiver und diffusiver Entwicklung des Magnetfeldes, die magnetische Reynoldszahl R_m , ist in der Photosphäre und der Korona auf den der Beobachtung zugänglichen Längenskalen aufgrund der hohen elektrischen Leitfähigkeit des Plasmas sehr groß (in Flaregebieten von der Größenordnung $10^8 - 10^{12}$). Das hat zur Folge, daß das Magnetfeld eng an die Plasmaströmungen gekoppelt ist (man spricht von „eingefrorenen“ magnetischen Feldlinien).
- Das Verhältnis der thermischen Energiedichte des Plasmas (des Plasmadrucks) und der magnetischen Energiedichte (des „magnetischen Drucks“), das Plasma-Beta β , ist in der unteren Korona in aktiven Regionen, in denen solare Eruptionen ausgelöst werden, sehr klein ($\beta \sim 10^{-3} \dots 10^{-2}$). Das hat zur Folge, daß dort das Magnetfeld dominiert und das Plasma dessen Veränderungen zu folgen hat.
- In der Korona übertrifft die magnetische Energie alle anderen Energieformen (thermische Energie, Gravitationsenergie, kinetische Energie) um mehrere Größenordnungen [12]. Daraus läßt sich schließen, daß die dynamische Entwicklung der Korona im wesentlichen durch die Lorentzkraft bestimmt wird.
- Großskalige koronale Strukturen (auch in aktiven Regionen) sind im allgemeinen mehrere Tage (gelegentlich mehrere Wochen) stabil. Daher geht man davon aus, daß sich die Korona im allgemeinen in sehr guter Näherung in einem kraftfreien Gleichgewicht befindet. Solare Eruptionen stellen gelegentliche Abweichungen von diesem Gleichgewicht dar.
- Das Plasma-Beta fällt von der Photosphäre ($\beta > 1$ in weiten Bereichen der Photosphäre) bis in die untere Korona ($\beta \ll 1$) stark ab, während die Alfvéngeschwindigkeit v_a stark zunimmt ($v_a \lesssim 1 \text{ km/s}$ in der Photosphäre und $v_a \gtrsim 1000 \text{ km/s}$ in der unteren Korona). Das hat zur Folge, daß zum einen das photosphärische Magnetfeld gegenüber Änderungen des koronalen Magnetfeldes unempfindlich ist und zum anderen, daß das koronale Magnetfeld durch die photosphärische Feldverteilung festgelegt

wird. Man spricht von der „Verankerung“ (engl. line tying) der koronalen Feldlinien in der Photosphäre. Da signifikante Änderungen des photosphärischen Magnetfeldes unmittelbar vor und während solarer Eruptionen in der Regel nicht beobachtet werden, muß die für die Eruption notwendige Energie bereits vor ihrer Auslösung in der Korona gespeichert sein.

Die heute am weitestgehendsten akzeptierte Gruppe theoretischer Modelle solarer Eruptionen wird unter der Bezeichnung „Storage and Release“ zusammengefaßt. Die Grundidee dieser Modelle sei im folgenden kurz skizziert.

Langsame ($\sim 1 \text{ km/s}$) photosphärische Plasmaströmungen sowie neuer, aus der Konvektionszone auftauchender magnetischer Fluß verzerren das in der Photosphäre verankerte koronale Magnetfeld. Dabei wird freie magnetische Energie, d.h. die Differenz zur Energie eines Potentialfeldes mit denselben photosphärischen Randbedingungen, in der Korona akkumuliert und in Form koronaler Ströme gespeichert. Dieser Prozeß erfolgt quasi-statisch auf einer Zeitskala von Stunden bis Tagen. Die zugehörigen photosphärischen Bewegungen sind der Beobachtung direkt zugänglich, auf das Vorhandensein koronaler Ströme kann aus Vektormagnetogrammen sowie aus der Beobachtung helischer Strukturen (Protuberanzen und Sigmoide) geschlossen werden. Während dieses Prozesses durchläuft die Korona eine Folge von Gleichgewichtszuständen. Überschreitet nun nach einer gewissen Zeit die Verzerrung des Magnetfeldes eine kritische Schwelle, so wird das Gleichgewicht instabil oder es existiert überhaupt kein benachbartes Gleichgewicht mehr. Die gespeicherte Energie wird nun freigesetzt und das koronale Magnetfeld entwickelt sich dynamisch. Die Nichtexistenz eines benachbarten Gleichgewichts wird in der sonnenphysikalischen Literatur in der Regel als „Loss of Equilibrium“ bezeichnet (in der Mathematik als „Katastrophe“ bekannt) und wurde in vereinfachten Konfigurationen mit Translationsymmetrie gefunden [13]. Die hier vorgestellten dreidimensionalen Simulationen deuten hingegen auf das Auftreten einer Instabilität hin.

In numerischen Simulationen, die auf der Grundidee des „Storage and Release“ beruhen, betrachtet man im allgemeinen Sequenzen stabiler, magnetisch geschlossener idealer MHD-Gleichgewichte unter stetig variierenden photosphärischen Randbedingungen. Man sucht nach Umständen, die zu einer Instabilität oder zu „Loss of Equilibrium“ in irgendeinem Punkt der Sequenz führen. Dazu werden typischerweise dipolare oder arkanartige magnetische Potentialfelder als Anfangsbedingung der Simulationen verwendet. Die photosphärischen Strömungen werden durch Scher- oder Wirbelbewegungen an den Stellen der höchsten Flußkonzentration oder durch deren langsames Zusammenschieben (siehe z. B. [16]) simuliert. Die in Kapitel 3 beschriebenen Simulationen dieser Arbeit folgen diesem Ansatz.

Neben der Gruppe der „Storage and Release“-Modelle gibt es noch eine weitere größere Gruppe von Modellvorstellungen, die unter der Bezeichnung „Directly Driven“-Modelle zusammengefaßt werden [17]. Diese Modelle sind jedoch mit den während solarer Eruptionen beobachteten Eigenschaften der Photosphäre nicht verträglich [12, 18] und werden deshalb im folgenden nicht behandelt. Für eine umfassende Übersicht heutiger Modelle

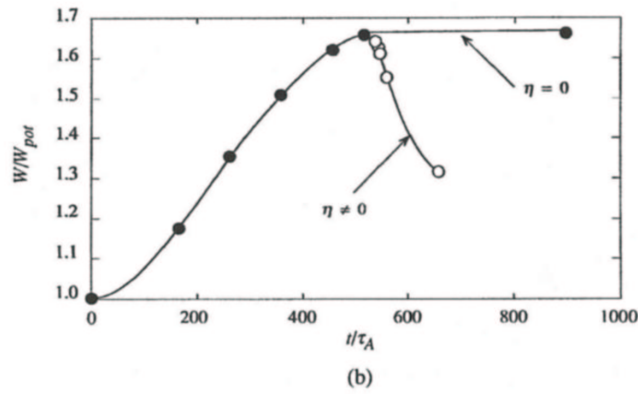
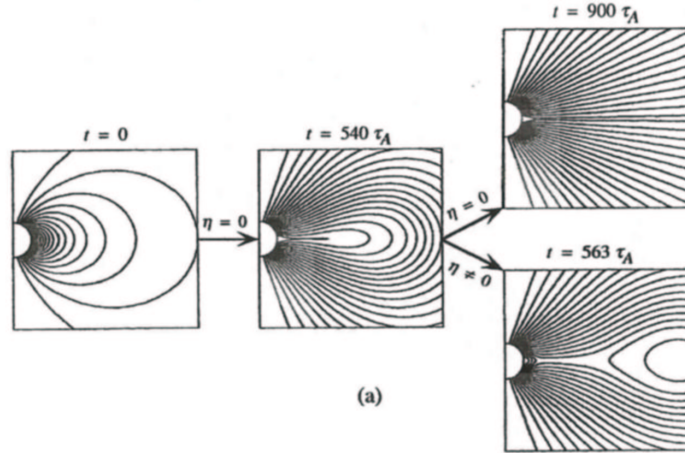


Abbildung 2: Ideal-resistive Simulation der Verscherung einer axialsymmetrischen magnetischen Arkade durch Fußpunktbewegungen auf beiden Seiten einer äquatorial angenommenen magnetischen Neutrallinie (nach Mikić & Linker [19]). a): in der idealen Simulation kommt es nach einer Verscherung von $\approx 2/3\pi$ zur Öffnung der magnetischen Feldlinien ($t = 900\tau_a$). Unter Einbeziehung einer endlichen Resistivität η zum Zeitpunkt $t = 540\tau_a$ findet hingegen eine Eruption statt. b): zugehörige Entwicklung der magnetischen Energie, wobei W_{pot} die magnetische Energie des anfänglichen Potentialfeldes ist.

solarer Eruptionen sei auf [12, 13] und [18] verwiesen.

1.2.1 Verscherung magnetischer Arkaden

Eine axialsymmetrische Arkade von Magnetfeldbögen wird in ihren Fußpunktgebieten, die sich auf den beiden Seiten einer magnetischen Neutrallinie befinden, durch entgegengesetzt gerichtete Plasmaströmungen verschert [19, 20]. Solche Scherbewegungen werden beobachtet. Bei kontinuierlicher Verscherung steigt das magnetische Flußsystem auf, bis hin zur (im Rahmen der Simulationsbox) völligen Öffnung der magnetischen Feldlinien, solange die

Simulation ideal erfolgt und magnetische Resistivität, d.h. endliche elektrische Leitfähigkeit aufgrund einer (lokalen) Nichtidealität des Plasmas, nicht zugelassen wird. Allerdings erfolgt dieser Prozeß rein quasi-statisch, ein eruptives Verhalten ist nicht beobachtbar. Zudem ist mit größerer Höhe der Arkade ein höherer magnetischer Energieinhalt verbunden (sogenanntes „Aly-Sturrock-Kriterium“ [21, 22]), eine Freisetzung der akkumulierten magnetischen Energie findet nicht statt. Erst unter Einbeziehung magnetischer Resistivität ab einem gewissen Zeitpunkt in der Simulation kommt es aufgrund magnetischer Rekonnexion zur Abspaltung eines Plasmoids (und damit zur Umgehung des Aly-Sturrock-Kriteriums aufgrund der Loslösung magnetischer Feldlinien von der Photosphäre) und zur Freisetzung freier magnetischer Energie (Abb. 2). Das Modell liefert jedoch keine physikalische Erklärung für das plötzliche Einschalten der Resistivität. Des weiteren liegt die notwendige Verscherung weit über den beobachteten Werten. Deshalb werden Modelle dieser Art heute nicht mehr verfolgt.

1.2.2 Magnetischer Ausbruch

Bei dieser von Antiochos et al. [23] durchgeführten Modellrechnung handelt es sich um eine Weiterentwicklung des obigen Arkadenmodells. Sie enthält eine quadrupolare Ausgangskonfiguration, bestehend aus vier geeignet ausgerichteten magnetischen Flußsystemen (Abb. 3). Die Verscherung der zentralen Arkade führt wie in [19, 20] zunächst zu deren Aufstieg. Zusätzlich wird nun jedoch eine horizontale Stromschicht an der Berührungsfläche der zentralen Arkade mit dem darüberliegenden Flußsystem ausgebildet, die den weiteren Aufstieg der Arkade in idealer MHD verhindert. Erst unter Einbeziehung magnetischer Resistivität kommt es, bei ausreichender Verscherung, durch in der Stromschicht stattfindende magnetische Rekonnexion zu einer Auftrennung der äußeren Magnetfeldbögen, die den weiteren Aufstieg der zentralen Arkade ermöglicht. In diesem Modell ist, im Gegensatz zu [19, 20], der Aufstieg der Arkade mit der erwarteten Abnahme magnetischer Energie verbunden. Allerdings erfordert es immer noch sehr starke Verscherungen von $\sim 3\pi/8$. Zudem erscheint die (globale) Konfiguration relativ künstlich, es existieren jedoch Hinweise, daß das Prinzip des magnetischen Ausbruchs auch für solare Eruptionen in aktiven Regionen in Frage kommt [24].

1.2.3 Instabilität magnetischer Flußröhren

Neben reinen Arkadenfeldern werden auch Konfigurationen betrachtet, die eine magnetische Flußröhre enthalten. In Abb. 4 ist eine solche Konfiguration dargestellt. Die Flußröhre (im gezeigten 2D-Modell ein magnetischer O-Punkt) befindet sich zu Beginn mit der über ihr gelegenen magnetischen Arkade in einem stabilen Gleichgewicht. Durch quasi-statisches Zusammenschieben der Fußpunkte der Arkade und magnetische Rekonnexion an der Neutrallinie werden mehr und mehr Arkadenfeldlinien in Flußröhrenfeldlinien umgewandelt, bis an einem kritischen Punkt der Sequenz kein benachbartes Gleichgewicht mehr existiert und die Flußröhre dynamisch zu einem höhergelegenen, nicht benachbartem Gleichgewicht „springt“ („Loss of Equilibrium“). Dabei kommt es unterhalb der Flußröhre zu einer Dis-

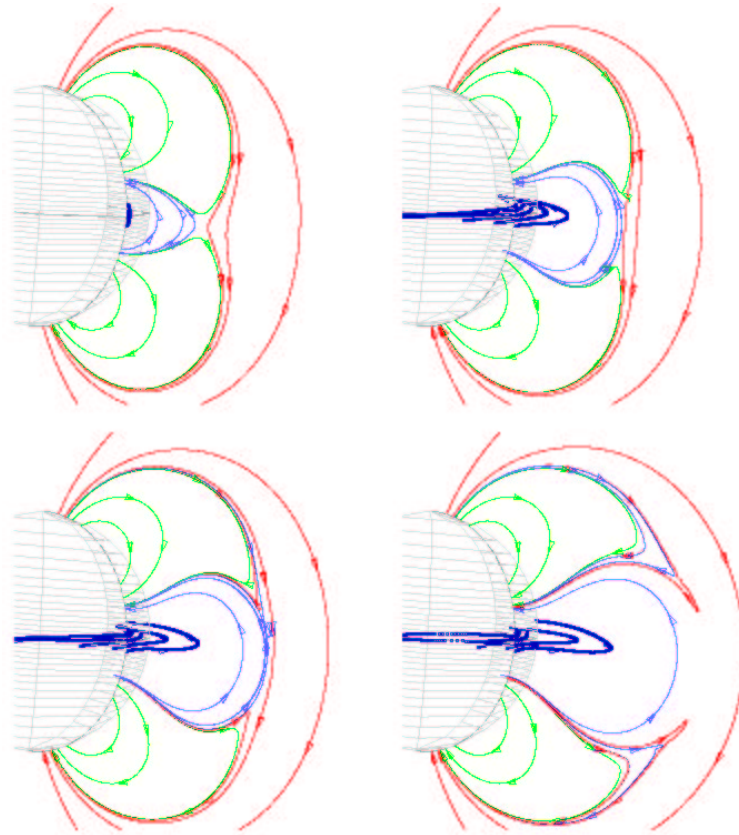


Abbildung 3: Resistive Simulation eines magnetischen Ausbruchs nach Antiochos et al. [23] (von links oben nach rechts unten). In dieser axialsymmetrischen Simulation wird die zentrale Magnetfeldarkade (dicke blaue Feldlinien) in azimuthaler Richtung an ihren Fußpunkten verschert. Bei ausreichender Verschierung rekonnectieren die über der Arkade befindlichen roten mit den entgegengesetzt gerichteten dünnen blauen Feldlinien zu seitlich gelegenen grünen Feldlinien. Diese Auftrennung magnetischen Flusses ermöglicht den Aufstieg der zentralen Arkade unter Freisetzung freier magnetischer Energie.

kontinuität und somit zur plötzlichen Ausbildung einer vertikalen Stromschicht. Wird nun in der Stromschicht magnetische Resistivität und somit magnetische Rekonnexion zugelassen, kommt es zu weiterer Energiefreisetzung und die Flußröhre steigt weiter auf. Ansonsten oszilliert sie zwischen den in Abb. 4 unten gezeigten Gleichgewichtszuständen und eine Eruption findet nicht statt. Das hier vorgestellte Modell ist zweidimensional und somit ist die Flußröhre vollständig von der Photosphäre getrennt. In einem realistischeren, dreidimensionalen Modell ist die Flußröhre gebogen und in der Photosphäre verankert, was zu ihrer zusätzlichen Stabilisierung führt. Es ist bis heute ungeklärt, ob in einer solchen Konfiguration ebenfalls „Loss of Equilibrium“ auftreten kann [12]. Die vor kurzem veröffentlichten Simulationen eruptiver dreidimensionaler Flußröhren [25, 26], die sich dieser Fragestellung zuwandten, konnten nicht überzeugend zu ihrer Klärung beitragen.

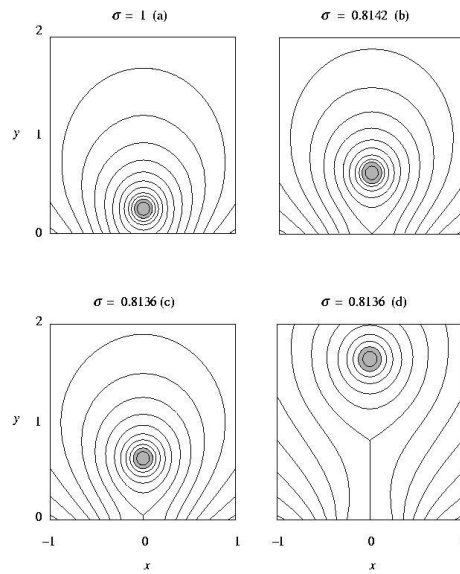


Abbildung 4: Translationssymmetrisches 2D-Flußröhrenmodell nach Isenberg et al. [15]. Das quasi-statische Zusammenschieben der Fußpunkte der magnetischen Arkade führt zu einem „Sprung“ der zentralen Flußröhre zu einem höhergelegenen Gleichgewicht und zur Ausbildung einer vertikalen Stromschicht (von links oben nach rechts unten). Die Variable σ steht für die normierte photosphärische Magnetfeldstärke.

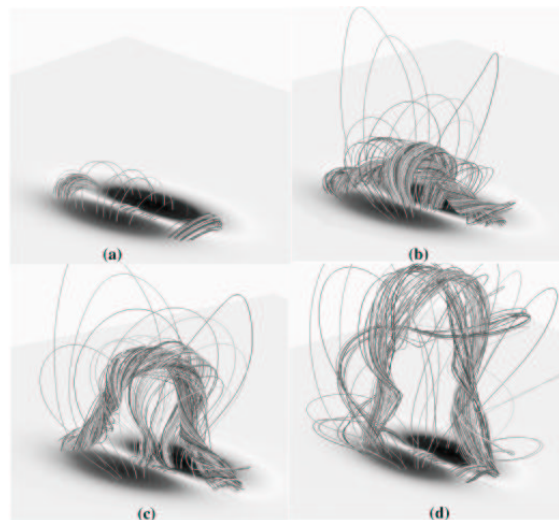


Abbildung 5: Resistive Simulation des Aufstiegs einer dreidimensionalen verdrehten magnetischen Flußröhre in Wechselwirkung mit einer über ihr gelegenen magnetischen Arkade nach Amari et al. [29].

Alternativ zur Zusammenschiebung der Fußpunkte der über der Flußröhre gelegenen Arkade kann in einem dreidimensionalen Flußröhrenmodell Energie auch durch das Verdrehen der in der Photosphäre verankerten Fußpunkte eingespeist werden. Derartige Wirbel des horizontalen Geschwindigkeitsfeldes werden in der Photosphäre ebenfalls beobachtet. In der Simulation von Amari et al. [27] steigt die Flußröhre bei ausreichender Verdrillung auf, die Freisetzung magnetischer Energie konnte jedoch bislang nur erreicht werden, wenn die Flußröhre mit einer benachbarten, ebenfalls verdrillten Flußröhre oder mit einer über ihr verlaufenden Arkade magnetische Rekonnexion eingehen konnte [28, 29], siehe Abb. 5. Zudem liegen die in den Simulationen von Amari et al. verwendeten Wirbelgeschwindigkeiten etwa eine Größenordnung über den beobachteten Werten, so daß es fraglich ist, ob die Energieeinspeisung tatsächlich quasi-statisch erfolgt.

1.2.4 Tether Cutting

In allen oben beschriebenen Modellen kann der die Eruption auslösende Prozeß im Rahmen der idealen MHD beschrieben werden, für ihren weiteren Verlauf ist jedoch stets die Einbeziehung magnetischer Resistivität notwendig. Das im folgenden vorgestellte „Tether Cutting“-Modell (in einer Variante nach [30]) benötigt bereits für die Beschreibung des auslösenden Prozesses die resistive MHD. Zudem geht es von einer bereits stromführenden Konfiguration aus und erklärt nicht, wie diese zustande kommt.

Als Ausgangspunkt des Modells dient eine bipolare aktive Region mit einem in der Umgebung der magnetischen Neutrallinie stark verscherten Kernfeld und einer darüberliegenden schwach verscherten Arkade (Abb. 6). Das Kernfeld besteht aus zwei nahe beieinander liegenden J-förmigen Feldliniensystemen, die zusammen betrachtet eine sigmoidale Form aufweisen, und ist in der Lage Protuberanzmaterial zu akkumulieren, wie in Abb. 6 links oben angedeutet. Kommen die beiden J-förmigen Feldliniensysteme nun in der Mitte der sigmoidalen Gesamtstruktur in Kontakt, z. B. durch Störungen an ihren Fußpunkten, so findet an ihrer Berührungsfläche magnetische Rekonnexion statt (Abb. 6 rechts oben). Dabei bilden sich in einem explosiven Vorgang zwei neue Strukturen aus: eine aufsteigende, verdrillte magnetische Flußröhre oberhalb des Sigmoids und eine Reihe stabiler, eventuell wieder unter die Photosphäre absinkender, stark verscherteter Magnetfeldbögen unterhalb des Sigmoids. Die Magnetfeldbögen sind stabil, da sie stärker in der Photosphäre verankert sind als die verdrillte Flußröhre, deren Aufstieg möglicherweise auf die Kink-Instabilität zurückzuführen ist. „Tether Cutting“ ist somit auch ein Modell für die Bildung einer instabilen magnetischen Flußröhre. Der weitere Verlauf der Eruption ist von der Energiemenge, die während der Rekonnexion freigesetzt werden kann, abhängig. Ist sie zu klein, so bildet sich eine Konfiguration wie in Abb. 6 links unten aus: der Aufstieg der Flußröhre wird durch das über ihr liegende stabile Magnetfeld abgebremst, die Eruption kommt zum Stillstand und es wird ein kompakter Flare beobachtet. Ist sie hinreichend groß, so steigt die Flußröhre weiter auf und es kommt zu einem Zwei-Bänder-Flare mit CME (Abb. 6 rechts unten).

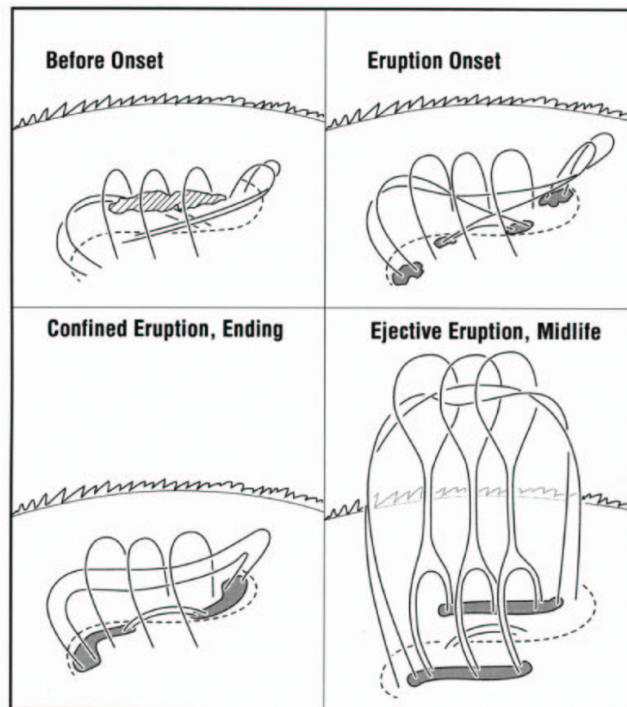


Abbildung 6: „Tether Cutting“-Modell nach Moore et al. [30]. Die magnetische Neutrallinie ist gestrichelt dargestellt. *Links oben*: anfängliche Konfiguration mit sigmoidal verschertem Kernfeld, das Prozubranzmaterial (*schraffiert*) akkumuliert hat. *Rechts oben*: Beginn der magnetischen Rekonnexion zwischen den beiden Feldliniensystemen des Sigmoids. *Links unten*: Endzustand einer unvollständigen Eruption (kompakter Flare). *Rechts unten*: Vollständige Eruption (Zwei-Bänder-Flare).

1.3 Motivation für die Wahl der Simulationsmodelle

Für die Simulationsmodelle dieser Arbeit wird auf das Konzept der Instabilität einer einzelnen verdrehten Flußröhre als möglicher Auslösungsprozeß solarer Eruptionen zurückgegriffen. Dies ist durch folgende Beobachtungen motiviert:

- CMEs werden überwiegend aus aktiven Regionen, den Gebieten der Sonnenatmosphäre die hauptsächlich aus geschlossenen magnetischen Strukturen bestehen, ausgeworfen [31].
- Sigmoide deuten auf eine Flußröhrentopologie des koronalen Magnetfeldes in aktiven Regionen hin.
- Das Erscheinungsbild solarer Eruptionen weist in vielen Fällen eine einzelne dominante bogenförmigen Struktur auf, deren Fußpunkte in der Sonnenoberfläche verankert sind (Abb. 1 oben rechts und unten rechts).

- CME-Kerne und ausbrechende Protuberanzen zeigen oft klare Anzeichen einer verdrehten Struktur (Abb. 1 unten links).
- Ausbrechende Protuberanzen weisen oft eine helische Form (Abb. 1 unten rechts) auf, die auf das Auftreten der Kink-Instabilität einer magnetischen Flußröhre hindeutet.

Des weiteren erscheint der Aufstieg einer magnetischen Flußröhre energetisch günstiger als der Aufstieg einer magnetischen Arkade. Die Simulationen von Amari et al. [27] haben gezeigt, daß sich im Falle einer einzelnen, durch photosphärische Wirbelbewegungen verdrehten Flußröhre ein Teil des über der Röhre befindlichen magnetischen Flusses zur Seite neigen kann, um den Aufstieg der Röhre zu ermöglichen. Im Gegensatz dazu erfordert die Eruption einer magnetischen Arkade den Aufstieg des gesamten über der Arkade liegenden Flusses oder eine spezielle (quadrupolare) Konfiguration (wie im Modell des magnetischen Ausbruchs).

2 Magnetohydrodynamische Grundlagen

2.1 Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik

Der Plasmazustand kann auf mehrere verschiedene Weisen physikalisch beschrieben werden. Hervorzuheben sind die Magnetohydrodynamik (MHD), die das Medium als elektrisch leitende Flüssigkeit modelliert, und die kinetische Plasmaphysik, die das Medium als Ensemble von diskreten Massen- und Ladungspunkten statistisch beschreibt. Sind die betrachteten Längenskalen groß gegenüber der mittleren freien Weglänge λ_{mfp} und die Strömungsgeschwindigkeiten des Plasmas klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ($u \ll c$), wird das Verhalten des Plasmas durch die Gleichungen der MHD [32, 33] bestimmt.² Die MHD ist eine Kontinuumstheorie, die die Hydrodynamik und die Maxwell'sche Theorie des elektromagnetischen Feldes unter einer Reihe von vereinfachenden Voraussetzungen vereinigt. Sie beschreibt die dynamische Entwicklung eines infinitesimalen Plasmafluides im Ortsraum. Die räumlichen und zeitlichen Skalen der Dynamik liegen mehrere Größenordnungen über denen der kinetischen Plasmaphysik. Letztere ist eine mikroskopische Theorie der Dynamik der Teilchenverteilungsfunktion und primär geeignet, Effekte im Geschwindigkeitsraum zu beschreiben. Diese Arbeit verwendet die MHD, da die makroskopische Dynamik koronaler Strukturen zu beschreiben ist. Aufgrund der riesigen Skalen ($L \gg \lambda_{\text{mfp}}$) beschränken sich die Untersuchungen auf die Anwendung der Einflüssigkeitstheorie. Den Ausgangspunkt bilden die vier Maxwell'schen Gleichungen ($\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0$)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon}. \quad (2.4)$$

Die Größe \mathbf{E} ist die elektrische Feldstärke, \mathbf{B} ist die magnetische Induktion (im folgenden der Einfachheit halber als Magnetfeld bezeichnet) und \mathbf{j} ist die Stromdichte. Die elektrische Raumladungsdichte $\rho_{el} = e(n_i - n_e)$, wobei e die Elementarladung und n_i und n_e die Teilchenzahldichte der Ionen bzw. Elektronen bezeichnen, kann auf den in der MHD betrachteten Längen- und Zeitskalen vernachlässigt werden („Quasi-Neutralität“) [32]. Der Verschiebungsstrom $c^{-2} \partial_t \mathbf{E}$ ist in der MHD ebenfalls vernachlässigbar, wie eine Abschätzung mit Hilfe der ersten und dritten Maxwellgleichung zeigt:

$$\frac{|c^{-2} \partial_t \mathbf{E}|}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \sim \frac{u^2}{c^2} \ll 1. \quad (2.5)$$

²Beide Voraussetzungen sind bei der Beschreibung solarer Eruptionen erfüllt. Die mittlere freie Weglänge beträgt in der Korona ca. 30 km und die höchsten bislang in CMEs beobachteten Geschwindigkeiten ca. 2500 km/s.

Die Eigenschaften des Mediums gehen in die Beziehung zwischen elektrischer Feldstärke und Stromdichte, dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j} + \frac{m_e}{ne^2} \partial_t \mathbf{j} - \frac{1}{2ne} \nabla p + \frac{1}{ne} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (2.6)$$

ein, wobei die Resistivität η die inverse Leitfähigkeit σ^{-1} bezeichnet. Das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz wird aus der Boltzmann-Gleichung durch Mittelung über den Geschwindigkeitsraum erhalten [34, 35]. In der überwiegenden Mehrheit der MHD-Anwendungen kann dieses Gesetz wesentlich vereinfacht werden [32] und führt auf

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j}. \quad (2.7)$$

Durch Einsetzen von Gl.(2.7) in (2.3) erhält man die Induktionsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \mathbf{j}), \quad (2.8)$$

die die zeitliche Entwicklung des Magnetfeldes bestimmt und durch den Geschwindigkeitsterm an die Plasmaströmung gekoppelt ist. Die Induktionsgleichung führt auf die *magnetische Reynoldszahl*. Dieser dimensionslose Parameter charakterisiert das Verhältnis von konvektiver Magnetfeldänderung $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ zu dissipativer Magnetfeldänderung $\frac{\eta}{\mu} \Delta \mathbf{B}$ (folgt aus dem letzten Term der rechten Seite bei räumlich konstanter Resistivität). Man nimmt an, daß typische Werte u_0 und B_0 für \mathbf{u} bzw. \mathbf{B} auf der Skala l existieren. Damit folgt:

$$\left| \frac{\mu \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}{\eta \Delta \mathbf{B}} \right| \sim \frac{\mu l^2 u_0 B_0}{\eta l B_0} = \frac{\mu l u_0}{\eta} = \frac{\tau_r}{\tau_c} = R_m. \quad (2.9)$$

Dabei ist $\tau_r = \mu l^2 / \eta$ die resistive Zeitskala und $\tau_c = l / u_0$ die Konvektionszeitskala. Ist die elektrische Leitfähigkeit unendlich groß, liegt der Spezialfall der idealen MHD vor. Da der Diffusionsterm auf der rechten Seite der Induktionsgleichung dann entfällt, sind die magnetischen Feldlinien in das Plasma „eingefroren“. In dieser Arbeit kommt ausschließlich die ideale MHD zur Anwendung, da die Hypothese vertreten wird, daß *ideale* Instabilitäten koronaler magnetischer Flußröhren solare Eruptionen auslösen können.

Ein weiterer wichtiger dimensionsloser Parameter der MHD ist das „*Plasma-Beta*“

$$\beta = \frac{2\mu p}{B^2}, \quad (2.10)$$

wobei die Variable p für den thermischen Druck steht. Das Plasma-Beta beschreibt das Verhältnis von thermischer zu magnetischer Energiedichte.

Die hydrodynamischen Grundgleichungen für den Fall einer kompressiblen Newtonflüssigkeit sind die Kontinuitätsgleichung (Massenbilanz), die Navier-Stokes-Gleichung (Impulsbilanz) und die Energiegleichung. Die ersten beiden Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T}, \quad (2.12)$$

wobei die Variablen ρ und \mathbf{T} für die Plasmadichte bzw. den viskosen Spannungstensor stehen. Die Komponenten des Tensors lauten

$$\mathsf{T}_{ij} = \rho\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \zeta \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.13)$$

wobei ν die kinematische Viskosität bezeichnet. Die Viskosität ist in der Korona aufgrund der dort herrschenden geringen Teilchenkonzentration in der Regel vernachlässigbar, wird jedoch in den Simulationen dieser Arbeit aus numerischen Gründen unter Vernachlässigung der Volumenviskosität ζ mitgeführt (siehe Abschn. 3.2). Unter \mathbf{f} versteht man die Kraftdichte. Die Ankopplung des elektromagnetischen Feldes an das Strömungsfeld ergibt sich durch die Berücksichtigung der Lorentzkraftdichte $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ in der Navier-Stokes-Gleichung. Für die hier durchgeführten Untersuchungen ist die Gravitationskraftdichte $\rho \mathbf{g}$ im Vergleich zur Lorentzkraftdichte vernachlässigbar klein, d. h. es wird $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ gesetzt. Die Lorentzkraftdichte kann unter Verwendung von $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ als

$$-\nabla (B^2/2\mu) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}/\mu \quad (2.14)$$

geschrieben werden. Man sieht, daß die magnetische Energiedichte $B^2/2\mu$ genauso in Gl. (2.12) eingeht wie der thermische Druck. Man spricht daher vom „magnetischen Druck“. Der rechte Term in (2.14) wird als „magnetische Spannung“ (engl. Tension) bezeichnet. Ist der thermische Druck klein gegenüber dem magnetischen Druck ($\beta \ll 1$), so kann das Plasma der Lorentzkraft keinen wesentlichen Widerstand entgegensetzen und das Magnetfeld kann das Plasma zusammenpressen oder verdünnen. Sehr kleine Werte von β sind in weiten Bereichen der Korona, insbesondere in den Höhenschichten, in denen solare Eruptionen ausgelöst werden, gegeben. Darum werden hier kompressible Simulationen durchgeführt. Die typische Ausbreitungsgeschwindigkeit von MHD-Wellen im Plasma ist die Alfvéngeschwindigkeit $v_a = B/(\mu\rho)^{1/2}$. Die Alfvénzeit ist auf der Längenskala l definiert als $\tau_a = l/v_a$. Die Energiegleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der Gesamtenergiedichte U eines infinitesimalen Plasmaelementes. U ist gegeben durch:

$$U = \frac{B^2}{2\mu} + \rho \frac{u^2}{2} + \rho e. \quad (2.15)$$

Dabei ist e die innere Energiedichte pro Masseneinheit.

Das Gleichungssystem muß durch eine Zustandsgleichung abgeschlossen werden. Für die Sonnenkorona wird die eines idealen einatomigen Gases herangezogen. Diese Näherung ist aufgrund der geringen Teilchenkonzentration im koronalen Plasma gerechtfertigt. Das Plasma ist eine hydrodynamisch ideale Flüssigkeit. In dieser Arbeit werden Wärmeleitungsprozesse vernachlässigt, da die dynamische Entwicklung des Magnetfeldes untersucht werden soll und die Heizung des Plasmas dabei nicht im Mittelpunkt steht. Das geschlossene System der idealen MHD-Gleichungen für ein kompressibles Plasma lautet somit unter den genannten Vereinfachungen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (2.16)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (2.19)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (2.22)$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e. \quad (2.23)$$

Die Gleichung (2.23) ist die Zustandsgleichung. Im dreidimensionalen Fall ist γ , das Verhältnis der spezifischen Wärmen, für ein ideales einatomiges Gas mit $\gamma = \frac{5}{3}$ gegeben. Der Energiestromdichtevektor \mathbf{S} in der Energiebilanzgleichung ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{S} = \left(\frac{p\gamma}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2}{2} + \frac{B^2}{\mu} \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \frac{\mathbf{B}}{\mu}. \quad (2.24)$$

In der Energiebilanzgleichung (2.19) sind keine Strahlungs- bzw. externen Heizungsterme enthalten, da die vorliegende Arbeit nicht Instabilitäten untersucht, die auf Strahlungsverlusten bzw. externer Heizung beruhen. Diese physikalischen Prozesse sind in den tieferen Schichten der Sonnenatmosphäre von Bedeutung.

In den meisten Simulationen dieser Arbeit wird der Druckgradient in Gl. (2.17) vernachlässigt, was aufgrund des kleinen Plasma-Beta in der unteren Korona eine zulässige Näherung darstellt (siehe Abschn. 1.2) und zur Abkopplung der Energiegleichung vom System führt. Die Beschleunigung der Plasmaströmung ist dann lediglich durch die Lorentzkraftdichte gegeben. Ist die Strömungsgeschwindigkeit des Plasmas klein gegenüber der Alfvéngeschwindigkeit, so können des weiteren die Terme auf der linken Seite von Gl. (2.17) vernachlässigt werden, womit sich diese auf

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (2.25)$$

die Gleichung für ein kraftfreies Magnetfeld, reduziert. Man drückt im kraftfreien Fall das Verhältnis von Stromdichte und Magnetfeld durch eine ortsabhängige Funktion $\alpha(x, y, z)/\mu$ aus, so daß gilt:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha(x, y, z) \mathbf{B} \quad (2.26)$$

bzw.

$$\alpha = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.27)$$

Der Parameter α heißt im Englischen „Force-Free Parameter“. Die Divergenzbildung von Gl. (2.26) führt aufgrund der Divergenzfreiheit des Magnetfeldes auf $\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0$. Dies

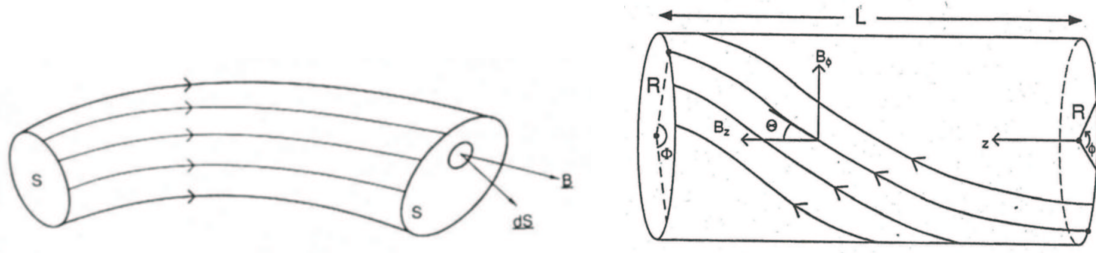


Abbildung 7: *Links*: Segment einer magnetische Flußröhre. *Rechts*: verdrillte zylindersymmetrische magnetische Flußröhre.

bedeutet, daß der Parameter α trotz seiner im allgemeinen gegebenen Ortsabhängigkeit entlang jeder einzelnen magnetischen Feldlinie konstant ist. Koronale Gleichgewichte sind im allgemeinen in sehr guter Näherung kraftfrei.

2.2 Magnetische Flußröhren

Plasmaloops sind der Grundbaustein der Sonnenkorona. Aktive Regionen, in denen solare Eruptionen vorrangig stattfinden, sind von unzähligen Loops durchsetzt, wie Satelliten-aufnahmen im EUV- und Röntgenlicht von TRACE, SOHO und YOHKOH zeigen. Koronale Loops sind bogenförmige magnetische Flußröhren, deren Fußpunkte in der dichten Photosphäre verankert sind. Im folgenden werden die für diese Arbeit wichtigsten Eigenschaften magnetischer Flußröhren kurz zusammengefaßt.

Eine *magnetische Feldlinie* ist an jeder Stelle parallel zum Magnetfeld \mathbf{B} und genügt der Gleichung

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}.$$

Unter einer *magnetischen Flußröhre* versteht man ein Volumen, das von Feldlinien eingeschlossen wird, die eine einfach geschlossene Kurve schneiden (Abb.7 links). Der *magnetische Fluß*

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

ist entlang einer Flußröhre konstant, wie sich mit Hilfe von $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ und dem Gaußschen Satzes zeigen läßt [32]. Die Feldlinien einer geraden zylindersymmetrischen Flußröhre (Abb. 7 rechts) liegen auf Zylinderflächen [36]. Die Komponenten des Magnetfeldes und der Stromdichte einer solchen Röhre lauten in Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{B} = (0, B_\phi(r), B_z(r)), \quad (2.28)$$

$$\mathbf{j} = \left(0, -\frac{dB_z}{dr}, \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB_\phi) \right), \quad (2.29)$$

wobei B_z und B_ϕ die axiale bzw. azimutale Komponente des Magnetfeldes, L die Länge der Flußröhre und r die Radialkoordinate bezeichnen. Die *Verdrillung* (engl. Twist) der Feldlinien wird durch die Größe

$$\Phi(r) = \frac{L}{r} \frac{B_\phi(r)}{B_z(r)} \quad (2.30)$$

ausgedrückt. Die Verdrillung ist im allgemeinen eine Funktion des Radius, d.h. Feldlinien auf unterschiedlichen Zylinderflächen sind unterschiedlich stark verdrillt. Die Anzahl der Windungen der Feldlinien um die Flußröhrenachse, gemessen von einem Ende der Röhre bis zum anderen, ist durch $\Phi/2\pi$ gegeben. Die *Händigkeit* der Verdrillung ist mit dem Force-Free Parameter α (Gl. (2.27)) verknüpft: für $\alpha < 0$ sind die Feldlinien linkshändig (entgegen dem Uhrzeigersinn) verdrillt und für $\alpha > 0$ rechtshändig (mit dem Uhrzeigersinn) verdrillt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von negativer bzw. positiver *Helizität* des Magnetfeldes. Die Lorentzkraftdichte in einer zylindersymmetrischen magnetischen Flußröhre besitzt lediglich eine Radialkomponente. Befindet sich die Flußröhre im kraftfreien Gleichgewicht, so gilt:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{B_\phi^2 + B_z^2}{2\mu} \right) + \frac{B_\phi^2}{\mu r} = 0, \quad (2.31)$$

wie sich durch Einsetzen von Gl. (2.28) und (2.29) in (2.25) ergibt. Der erste Term auf der linken Seite ist der Gradient des magnetischen Drucks und der zweite die magnetische Zugkraft (vergleiche mit (2.14)). Für den Fall einer gleichmäßig verdrillten Flußröhre ($\Phi(r) = \Phi_0$) lautet die Lösung von Gl. (2.31):

$$B_z = \frac{B_0}{1 + (\Phi_0 r/L)^2}, \quad B_\phi = \frac{B_0 \Phi_0 r/L}{1 + (\Phi_0 r/L)^2}, \quad (2.32)$$

wobei B_0 die Magnetfeldstärke auf der Zylinderachse bezeichnet. Diese Konfiguration wird als „Gold-Hoyle-Gleichgewicht“ [37] bezeichnet. Zylindersymmetrische magnetische Flußröhren dienen als einfache Modelle für koronale Loops. Die Krümmung der Loops kann für $R \ll L$, wobei R den Radius der Flußröhre bezeichnet, für viele Problemstellungen vernachlässigt werden (für koronale Loops gilt typischerweise $L/R \sim \mathcal{O}(10)$).

2.3 Kink-Instabilität zylindersymmetrischer Flußröhren

In einer stromführenden magnetischen Flußröhre können eine Reihe verschiedener idealer MHD-Instabilitäten auftreten (siehe z. B. [34]). Die wichtigste unter ihnen ist die Kink-Instabilität, denn sie besitzt in kraftfreien Konfigurationen die niedrigste Schwelle [38]. Sie tritt auf, wenn die Verdrillung der Feldlinien in der Röhre hinreichend groß ist. In der *linearen* Phase der Instabilität nähert sich die Flußröhrenachse unter Abnahme der magnetischen Energie der helischen Form der einzelnen Feldlinien an, was zu einer Verbiegung („Kink“) der Flußröhre führt. Eine einmal bestehende Auslenkung wird verstärkt, da die Feldlinien auf der Innenseite der Biegung dichter liegen als auf der Außenseite und somit

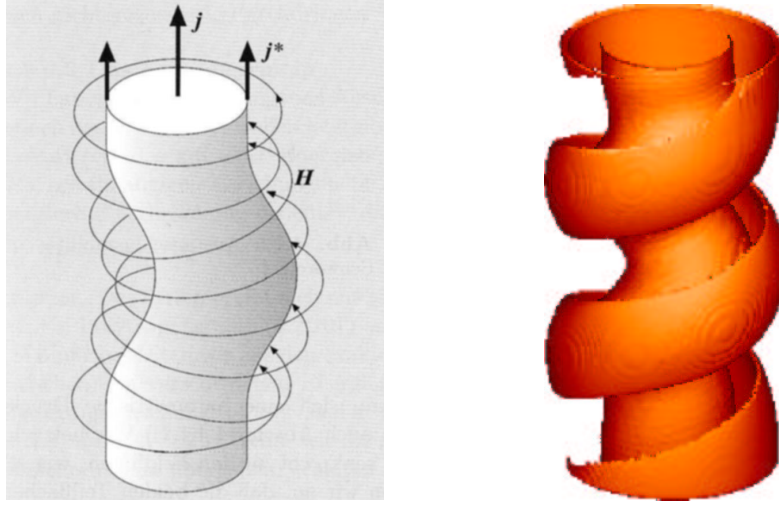


Abbildung 8: Kink-Instabilität einer zylindersymmetrischen magnetischen Flußröhre. *Links*: Darstellung eines sogenannten „z-Pinches“, in dem die Axialkomponente des Magnetfeldes Null ist und der Strom in rein axialer Richtung fließt. Eine derartige Konfiguration ist nicht kraftfrei. *Rechts*: Iso-Fläche der Stromdichte aus einer numerischen Simulation der Kink-Instabilität einer kraftfreien magnetischen Flußröhre (nach Gerrard et al. [52]). Die Flußröhre wird von einer helisch geformten Stromschicht umwunden, die sich während der Instabilität entwickelt.

der magnetische Druck auf der Innenseite größer ist als auf der Außenseite. In Abb. 8 links ist die Kink-Instabilität für den Grenzfall unendlicher Verdrillung ($B_z \rightarrow 0$) dargestellt.

Die Stabilität toroidaler magnetischer Flußröhren mit periodischen Randbedingungen wurde im Rahmen der Fusionsforschung ausgiebig untersucht (siehe z. B. [33]). Für Anwendungen in der Koronaphysik muß die Verankerung koronaler Plasmaloops in der Photosphäre in Form geeigneter Randbedingungen in Betracht gezogen werden. Zylindersymmetrische Flußröhrenmodelle werden hierbei dem Torus vorgezogen, da die Einbeziehung der Fußpunktverankerung in die Stabilitätsanalyse in diesen wesentlich einfacher ist.

In der linearen Stabilitätsanalyse von MHD-Gleichgewichten untersucht man die Stabilität des Gleichgewichts gegenüber kleinen Störungen (siehe z. B. [39, 40]). Unter Annahme eines statischen Gleichgewichts ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) und einer Störung der Form

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r})e^{i\omega t} \quad (2.33)$$

lassen sich die linearisierten MHD-Gleichungen auf eine einzelne Eigenwertgleichung der Form

$$-\rho_0\omega^2\xi(\mathbf{r}) = \mathbf{F}[\xi(\mathbf{r})] \quad (2.34)$$

zurückführen, wobei ρ_0 die Plasmadichte bezeichnet und \mathbf{F} ein lineares Funktional der Störung und ihrer räumlicher Ableitungen ist. Die Eigenwerte ω der Gl. (2.34) sind stets

reell. Für $\omega > 0$ ist das Gleichgewicht stabil und für $\omega < 0$ instabil. Den Fall $\omega = 0$ bezeichnet man als marginale Stabilität. Für eine ausführliche Beschreibung der linearen Stabilitätsanalyse von MHD-Gleichgewichten sei auf [32] verwiesen.

Bei der Untersuchung der linearen Stabilität zylindersymmetrischer magnetischer Flußröhren betrachtet man radial gerichtete Störungen der Form

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(r)e^{i(m\theta + kz)}e^{i\omega t}, \quad (2.35)$$

wobei m die azimutale und k die axiale Wellenzahl bezeichnen. Die azimutale Wellenzahl ist ganzzahlig. Ihr Wert legt den Typus der betrachteten Mode fest. Die Mode $m = 0$ führt zur Ausbildung der sogenannten „Würstcheninstabilität“ (engl. Sausage Instability), die Mode $m = 1$ führt zur Ausbildung der Kink-Instabilität. Die Moden $m > 1$ werden als „Flute Modes“ (im Deutschen etwa: Nut- oder Wellenmoden) oder mitunter auch als höhere Kink-Moden bezeichnet. Die Moden $m \neq 1$ besitzen in kraftfreien Konfigurationen höhere Schwellwerte als die Mode $m = 1$ und sind für diese Arbeit nicht von Belang.

Untersuchungen der Kink-Instabilität zylindersymmetrischer magnetischer Flußröhren mit Fußpunktverankerung werden im Hinblick auf die Erklärung (kompakter) solarer Flares bereits seit einigen Jahrzehnten durchgeführt und haben ergeben, daß der Schwellwert der Instabilität im wesentlichen von der Stärke der Verdrillung der Flußröhre abhängt. Hood und Priest [41] fanden 1981 für das „Basismodell“ eines koronalen Loops, das Gold-Hoyle Gleichgewicht (siehe Abschn. 2.2), unter Berücksichtigung der Fußpunktverankerung eine kritische Verdrillung von

$$\Phi_{\text{GH}} = 2.49\pi. \quad (2.36)$$

Bei Vernachlässigung der Fußpunktverankerung reduziert sich die kritische Verdrillung auf $\Phi_c = 2\pi$ („Kruskal-Shafranov-Bedingung“ [42, 43].)

Seither wurden eine Vielzahl allgemeinerer Flußröhrenkonfigurationen untersucht [44, 45], seit den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts verstärkt mittels numerischer Simulationen [3], [46]-[53]. In diesen wurde entweder von einer bereits instabilen Gleichgewichtskonfiguration ausgegangen und die Kink-Instabilität durch eine Störung des Gleichgewichts angeregt (siehe z. B. [52]) oder es wurde ein anfänglich homogenes, rein axial gerichtetes Magnetfeld durch Wirbelbewegungen bis zum Auftreten der Kink-Instabilität kontinuierlich verdrillt (siehe z. B. [46]). In den letztgenannten Konfigurationen ist der Nettostrom durch die Photosphäre stets Null (vergl. mit dem in Kapitel 3 beschriebenen Modell).

Diese Untersuchungen ergaben, daß die Stabilität der Flußröhre durch die Einbeziehung des Plasmadrucks, durch die Annahme einer radial veränderlichen Verdrillung und durch die Einbettung der Flußröhre in ein umgebendes Potentialfeld erhöht wird, die kritische Verdrillung jedoch stets von der Größenordnung des Wertes des Gold-Hoyle-Gleichgewichts bleibt [40]. Eine signifikante Erhöhung der kritischen Verdrillung wurde für hinreichend dünne Flußröhren [51] und in Konfigurationen mit einer Vorzeichenumkehr der Axialkomponente des Magnetfeldes innerhalb der Flußröhre [45] gefunden, wobei

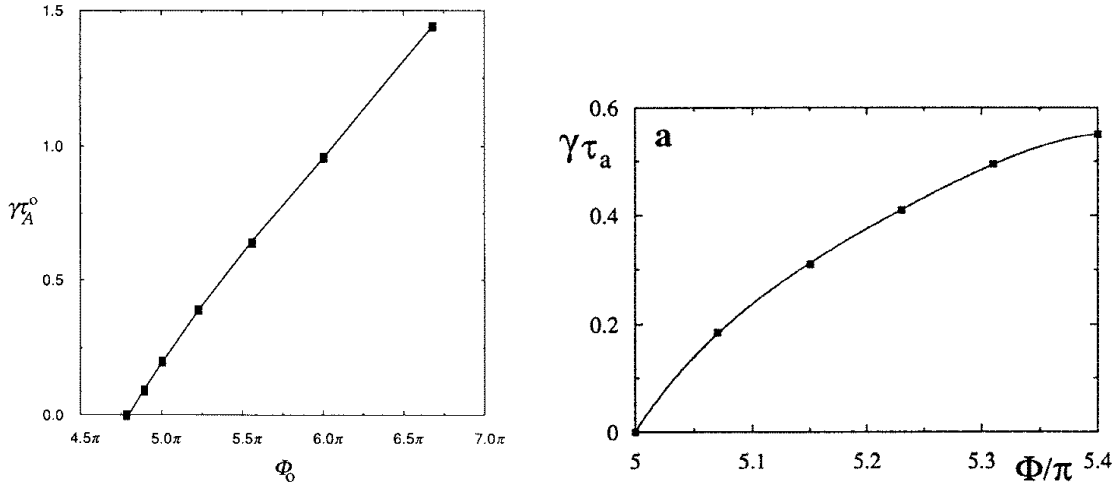


Abbildung 9: Wachstumsraten der Kink-Instabilität in zwei unterschiedlichen zylindersymmetrischen Flußröhrenmodellen. In beiden Fällen ist die Verdrillung radial veränderlich. Die Normierung der Wachstumsraten erfolgt beidesmal auf diejenige Zeit, die benötigt wird, um die Flußröhre einmal der Länge nach mit Alfvéngeschwindigkeit zu durchlaufen. *Links*: als Funktion der Verdrillung an der Flußröhrenachse (Mikić et al. [46]). *Rechts*: als Funktion der maximalen Verdrillung innerhalb der Flußröhre (Baty & Heyvaerts [47]).

letztere für Anwendungen in der Korona durch die Beobachtung nicht gestützt werden [40]. Die Wachstumsraten der Kink-Instabilität wurden z. B. von Mikić et al. [46] und Baty & Heyvaerts [47] quantitativ angegeben (Abb. 9).

In der *nichtlinearen* Phase der Instabilität ist die Störung des Gleichgewichtes derart angewachsen, daß sie nicht mehr als klein angesehen werden kann. In dieser Phase kommt es zu einer Sättigung der Instabilität, die Flußröhre nähert sich einem helisch verformten Gleichgewicht geringerer magnetischer Energie an. In zylindersymmetrischen Konfigurationen mit nichtverschwindender Axialkomponente B_z und mit radial veränderlicher Verdrillung $\Phi(r)$ kommt es zur Ausbildung einer helisch geformten Stromschicht, die die Flußröhre umwindet (Abb. 8 rechts).³

Wird Resistivität und somit magnetische Rekonnexion in der Stromschicht zugelassen,

³Die Stromschichtbildung während der Kink-Instabilität in zylindersymmetrischen Konfigurationen ist Gegenstand intensiver Forschung. In der Literatur wird hierbei zwischen Stromschichten ($|\mathbf{B}| \rightarrow \infty, l \rightarrow 0$) und Stromkonzentrationen ($|\mathbf{B}| < \infty, l > 0$) unterschieden (siehe z. B. [48, 52]), wobei diese Unterscheidung in numerischen Simulationen aufgrund der stets vorhandenen endlichen Gitterauflösung schwierig ist. Sie ist jedoch für die Frage der Energiefreisetzung in solaren Eruptionen von Bedeutung, da in Stromkonzentrationen (im Gegensatz zu Stromschichten) magnetische Rekonnexion und somit eine Energiefreisetzung nur auftritt, wenn eine hinreichend hohe magnetische Resistivität vorhanden ist. Da in dieser Arbeit ausschließlich die ideale MHD zur Anwendung kommt, wird im folgenden von dieser Unterscheidung abgesehen und der Einfachheit halber stets von Stromschichten gesprochen. Es sei in diesem Zusammenhang noch erwähnt, daß in manchen Konfigurationen, abhängig vom radialen Profil des Magnetfeldes, mehrere helische Stromschichten in verschiedenen Entfernungen von der Flußröhre auftreten können (siehe z. B. [3]).

so kommt es zu einer Umwandlung der freien magnetischen Energie in kinetische Energie des Plasmas und in Wärmeenergie. In numerischen Untersuchungen wurde gefunden, daß hierbei bis zu ca. fünfzig Prozent der magnetischen Energie umgewandelt werden (siehe z. B. [52]). Dies macht die Kink-Instabilität zylindersymmetrischer magnetischer Flußröhren für die Erklärung kompakter Flares attraktiv.

Sämtliche bisherigen Untersuchungen der Kink-Instabilität koronaler Loops wurden an geraden Flußröhrenmodellen durchgeführt. In dieser Arbeit wird erstmalig eine Untersuchung der Kink-Instabilität eines bogenförmigen Flußröhrenmodells unter Berücksichtigung der Fußpunktverankerung vorgestellt (siehe Kapitel 4). Es wird gezeigt (Kapitel 4 und 5), daß die Kink-Instabilität bogenförmiger Flußröhren im Gegensatz zu zylindersymmetrischen Modellen auch als Auslösungsmechanismus von Zwei-Bänder-Flares in Frage kommt.

2.4 Instabilität bogenförmiger Flußröhren

In diesem Abschnitt werden die bisher vorliegenden Kenntnisse über die Stabilitätseigenschaften *bogenförmiger* magnetischer Flußröhren im Hinblick auf die Modellierung koronaler Plasmaloops kurz zusammengefaßt. Kraftfreie Gleichgewichte, die eine bogenförmige verdrillte magnetische Flußröhre enthalten, kommen einer realistischen Modellierung koronaler Loops aufgrund der Berücksichtigung der Krümmung der Loops und der realistischeren Abnahme des Umgebungsfeldes mit dem Abstand von der Flußröhre näher als zylindersymmetrische Flußröhrenmodelle. Da bis vor einigen Jahren keine analytische Formulierung eines solchen Gleichgewichts vorlag, das als Anfangsbedingung numerischer Simulationen hätte verwendet werden können, wurde in numerischen Untersuchungen die verdrillte Flußröhre stets, ausgehend von einem bipolaren Potentialfeld, durch Wirbelbewegungen an den Fußpunkten der Röhre erzeugt.

Eine solche kontinuierliche Verdrillung einer magnetischen Flußröhre führt in kraftfreien zylindersymmetrischen Konfigurationen zur Kink-Instabilität. Hierbei beträgt die kritische Verdrillung $\Phi_c \approx 2.5\pi$ (siehe Abschn. 2.3). Für bogenförmige Flußröhrenmodelle ist hingegen nicht bekannt, ob die Kink-Instabilität bei kontinuierlicher Verdrillung überhaupt auftritt oder ob die Flußröhre der Instabilität ausweichen kann, indem sie sich im Rahmen einer quasi-statischen Entwicklung ausdehnt und aufsteigt. Es liegen jedoch Hinweise darauf vor, daß auch in einem solchen System eine kritische Verdrillung existiert, nach deren Überschreitung eine qualitative Änderung der Entwicklung des Systems auftritt [27, 54]. Die Natur dieser Änderung ist jedoch noch nicht systematisch untersucht wurden.

In sämtlichen bisherigen Untersuchungen der langsamen (quasi-statischen) Verdrillung bogenförmiger Flußröhren wurde gefunden, daß die Flußröhre aufsteigt, eine helische Verformung ausbildet und für Verdrillungen $\Phi \leq 2\pi$ in ein stabiles kraftfreies Gleichgewicht relaxiert. Van Hoven et al. [55] fanden ein stabiles Gleichgewicht für eine Verdrillung von 2.82π , einem Wert, der etwas über dem Schwellwert der Kink-Instabilität in zylindersymmetrischen Konfigurationen liegt und deshalb vermutlich den stabilisierenden Einfluß der

über der Flußröhre gelegenen stromfreien magnetischen Arkade widerspiegelt. Klimchuk et al. [54] erhielten stabile Gleichgewichte für $\Phi = \pi$ und 2π . Sie wiesen darauf hin, daß die Relaxationszeit für Verdrillungen, die deutlich über 2π lagen, sehr stark anstieg, was auf eine qualitative Änderung des Systemverhaltens jenseits einer kritischen Verdrillung hindeutet.

Amari et al. [27] simulierten die Entwicklung einer kontinuierlich verdrillten Flußröhre unter Verwendung reduzierter idealer MHD-Gleichungen. Sie verwendeten erstmals einen der Beobachtung entsprechenden starken Abfall der Plasmadichte $\rho(\mathbf{x})$ mit der Höhe über der Photosphäre, integrierten jedoch die Kontinuitätsgleichung nicht mit, so daß $\rho(\mathbf{x})$ während der gesamten Simulation fest vorgegeben war. Sie fanden deutliche Anzeichen für eruptives Verhalten: die quasi-statische Entwicklung des Systems brach oberhalb einer kritischen Verdrillung ab und ein beschleunigter Aufstieg der Flußröhre setzte ein, wobei Geschwindigkeiten nahe der Alfvéngeschwindigkeit auftraten. Für Verdrillungen $\Phi \gtrsim 2.5\pi$ konnte das System nicht mehr in ein Gleichgewicht relaxiert werden [T. Amari, persönliche Kommunikation]. Ein analoges System wurde von Tokman & Bellan [56] untersucht. Sie bezogen magnetische Resistivität mit ein, schrieben jedoch eine konstante Plasmadichte vor. Dynamisches Verhalten wurde auch in dieser Untersuchung beobachtet, jedoch erst, nachdem magnetische Rekonnexion zwischen verschiedenen Abschnitten der Flußröhre stattgefunden hatte. Tokman und Bellan gaben keine Werte für die Verdrillung der Flußröhre zu diesem Zeitpunkt der Entwicklung an, sie sprachen lediglich, abhängig von den vorgeschriebenen Wirbelgeschwindigkeiten, von „einigen Windungen“ bis hin zu „sehr starker Verdrillung“, d. h. von Werten, die vermutlich deutlich über 2.5π liegen. Diese Ergebnisse, die auf eine ideale MHD-Stabilität der Flußröhre auch für eine beträchtliche Verdrillung hindeuten, sind aller Wahrscheinlichkeit nach sehr stark von der hohen Trägheit des Plasmas im oberen Teil ihrer Simulationsbox, die aus der Vorgabe räumlich konstanter Dichte folgt und eine nahezu quasi-statische Entwicklung vortäuschen kann, beeinflusst.

In den folgenden beiden Kapiteln dieser Arbeit wird eine systematische Untersuchung der Instabilität bogenförmiger magnetischer Flußröhren durchgeführt. Hierbei werden sowohl ein durch Wirbelbewegungen kontinuierlich verdrilltes System (Kapitel 3) als auch ein bereits zu Beginn der Simulation verdrilltes System betrachtet (Kapitel 4).

3 Entwicklung koronaler magnetischer Flußröhren unter dem Einfluß photosphärischer Wirbelbewegungen

3.1 Einführung

Dieses Kapitel beschreibt numerische Simulationen der Stabilität und der zeitlichen Entwicklung einer bogenförmigen magnetischen Flußröhre, die aus einem Potentialfeld durch an den Fußpunkten der Röhre lokalisierte Wirbel gebildet wird. Es wird untersucht, ob die Flußröhre bei ausreichender Verdrillung ihre Stabilität verliert und einen Übergang zu dynamischem Verhalten bis hin zum Aufstieg des Flußsystems, wie er in CMEs beobachtet wird, aufweist. Die zugrundeliegende Motivation für die Betrachtung eines solchen Systems wurde in Abschn. 1.3 erläutert.

Die Simulationen folgen dem in Abschn. 1.2 beschriebenen Prinzip der „Storage and Release“-Modelle: in einem anfänglich stromfreien magnetischen Flußsystem wird durch langsame Wirbelbewegungen, die an den Stellen der höchsten Flußkonzentration ausgeprägt werden, eine verdrillte Flußröhre erzeugt und in den Bereich einer möglichen Instabilität getrieben. Das untersuchte System dient als einfaches Modell einer aktiven Region, bestehend aus zwei rotierenden Sonnenflecken und darüberliegendem geschlossenem magnetischen Fluß. Die Rotation der Wirbel erhöht in der Simulation kontinuierlich die Verdrillung des Systems und damit die Stromdichten. Die Beobachtung zeigt, daß in aktiven Regionen, die Anzeichen verdrillter Magnetfelder (wie z. B. Sigmoide) und damit koronaler Ströme aufweisen, die Wahrscheinlichkeit des Auftretens solarer Eruptionen höher ist als in „unverdrillten“ aktiven Regionen [10]. Eine direkte *quantitative* Verbindung zwischen photosphärischen Wirbelbewegungen und solaren Eruptionen ist jedoch in den bisher verfügbaren Beobachtungen aus den folgenden Gründen nur schwer herzustellen.

- Die Beobachtung photosphärischer Wirbelbewegungen ist schwierig, weshalb nur wenige Beobachtungen existieren [57]-[60].
- Magnetischer Fluß kann bereits verdrillt aus der Konvektionszone auftauchen [61, 62], so daß bereits eine kleine zusätzliche Verdrillung die Destabilisierung des Flußsystems herbeizuführen kann.
- Es besteht ferner die Möglichkeit, daß instabile magnetische Konfigurationen durch magnetische Rekonnexion in der Korona [30, 63, 64], d. h. ganz ohne photosphärische Wirbelbewegungen, erzeugt werden (Abschn. 1.2.4).

Das Modell ist deshalb nicht als umfassende Erklärung des Auslösungsmechanismus solarer Eruptionen zu verstehen, sondern soll in erster Linie als Baustein und Referenzsystem künftiger, ausgefeilterer Modelle dienen. Darüber hinaus ist es aus den in Abschn. 2.4 aufgeführten Gründen von hohem theoretischen Interesse. Die wesentlichen Charakteristika des betrachteten Systems sind:

- Ausgehend von einem Potentialfeld werden kraftfreie Gleichgewichte, die eine verdrillte Flußröhre enthalten, numerisch konstruiert.

- Diese Gleichgewichte beinhalten neben dem Strom in der Flußröhre einen Umkehrstrom in der Umgebung der Flußröhre, derart, daß der Nettostrom durch die Grundfläche des Systems annähernd Null ist (siehe Abschn. 3.3.1).

Das hier untersuchte System weist in vielerlei Hinsicht Ähnlichkeit mit dem von Amari et al. [27] studierten auf, es wird hier jedoch eine andere Magnetfeldkonfiguration betrachtet. Über Amari et al. [27] hinausgehend wird ferner nach der Existenz einer kritischen Verdrillung gesucht, indem versucht wird, das System für verschiedene Werte der Verdrillung zu relaxieren. Abweichungen vom kraftfreien Zustand des Systems werden dabei gemessen. Ferner wird der Einfluß der Trägheit des Plasmas und der Wirbelgeschwindigkeiten auf die dynamische Entwicklung des Systems untersucht. Hierfür werden verschiedene Dichteprofile betrachtet und die Kontinuitätsgleichung in die Integration miteinbezogen bzw. die Wirbelgeschwindigkeiten gegenüber den Werten, die in den in Abschn. 2.4 aufgeführten Arbeiten verwendet wurden, deutlich reduziert. Schließlich wird durch Variation der Wirbelabstände der Einfluß der zwischen den Wirbeln auftretenden Verscherung auf die Entwicklung des Systems untersucht.

Dieses Kapitel gliedert sich wie folgt. Nach der Beschreibung der numerischen Methode (Abschn. 3.2) wird in Abschn. 3.3 die zeitliche Entwicklung der verdrillten Flußröhre ausführlich untersucht. Dieser Abschnitt beinhaltet eine Parameterstudie, bei der die Wirbelabstände, die anfängliche Dichteverteilung und die Wirbelgeschwindigkeit variiert werden, sowie die Beschreibung der durchgeführten Relaxationsrechnungen. In Abschn. 3.4 werden Zusammenhänge mit Beobachtungen hergestellt. Abschn. 3.5 enthält eine Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse.

3.2 Simulationsmodell

Die Simulationen werden im Rahmen der idealen MHD ausgeführt, bei der der resistive Term in der Induktionsgleichung (2.8) entfällt. Des weiteren werden die Gravitation und der thermische Druck vernachlässigt, was bei der Modellierung der Dynamik instabiler magnetischer Flußsysteme in der magnetisch dominierten Korona eine zulässige Vereinfachung darstellt [12] (siehe auch Abschn. 1.2). Die Annahme verschwindenden thermischen Drucks ($\beta = 0$) garantiert darüber hinaus, daß gefundene Gleichgewichte wirklich kraftfrei sind. Ferner führt sie zur Entkoppelung der Energiegleichung (2.19) vom Gleichungssystem (2.16)–(2.19).⁴ Die zeitliche Entwicklung des untersuchten Systems wird somit durch das folgende reduzierte Gleichungssystem beschrieben:

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}), \quad (3.37)$$

$$\rho \partial_t \mathbf{u} = -\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbb{T}, \quad (3.38)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (3.39)$$

wobei die Stromdichte durch Gl. (2.21) gegeben ist. Die Beibehaltung des viskosen Terms in Gl. (3.38) erfolgt aus rein numerischen Gründen: zum einen, um die Relaxation des

⁴Die Entkoppelung der Energiegleichung vereinfacht nicht nur das den Simulationen zugrundegelegte Gleichungssystem, sondern reduziert auch spürbar die benötigte Rechenzeit.

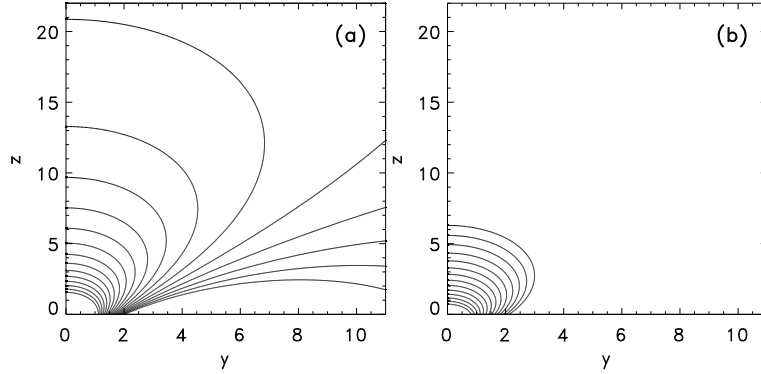


Abbildung 10: Magnetische Feldlinien, die dem äußeren Wirbelbereich entspringen. Die Abbildung zeigt Feldlinien, die entlang der y -Achse zwischen dem Wirbelzentrum und der Stelle, an der die Wirbelgeschwindigkeit auf ein Zehntel ihres Maximalwertes abgesunken ist, starten. *a*): von zwei vertikal gerichteten Dipolen erzeugtes Feld, wie in dieser Arbeit verwendet ($y_0 = 1$). *b*): von einem einzelnen, horizontal gerichteten Dipol erzeugtes Feld, wie von Amari et al. [27] verwendet.

Systems in kraftfreie Zustände zu erleichtern, und zum anderen, um die numerische Stabilität der Simulationen zu erhöhen. Die gewählte Formulierung läßt räumlich veränderliche Viskosität zu und geht damit über den in der Literatur anzutreffenden Standard einer räumlich konstanten Viskosität hinaus.

Die Normierung der Gln. (3.37)–(3.39) erfolgt durch Größen, die sich aus der charakteristischen Längenskala der Anfangskonfiguration l_d (dem kleinsten verwendeten Dipolabstand), $\tilde{B}_{0z_{\max}}$ (des Maximums der Normalkomponente des anfänglichen Magnetfeldes in der Grundfläche $\{z = 0\}$) und $\tilde{\rho}_0$ und $\tilde{v}_{a0} = \tilde{B}_{0z_{\max}}/(\mu_0\tilde{\rho}_0)^{1/2}$ (der Dichte bzw. Alfvéngeschwindigkeit an der Position von $\tilde{B}_{0z_{\max}}$) ergeben. Diese Größen sind l_d , \tilde{v}_{a0} , $\tau_a = l_d/\tilde{v}_{a0}$, $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{B}_{0z_{\max}}$ und $\tilde{B}_{0z_{\max}}/\mu_0 l_d$ für die Variablen \mathbf{x} , \mathbf{u} , t , ρ , \mathbf{B} und \mathbf{j} . Die gewählte Normierung läßt die Form der Gln. (3.37)–(3.39) unverändert. Das Amperesche Gesetz (2.21) hingegen schreibt sich nun wie folgt:

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (3.40)$$

3.2.1 Anfangsbedingungen

Das anfänglich stromfreie Magnetfeld wird von zwei vertikalen Dipolen an den Positionen $(0, \pm y_0, -z_0)$ erzeugt, deren Momente $n\hat{\mathbf{z}}$ und $-n\hat{\mathbf{z}}$ entgegengesetzt gerichtet sind. Das Plasma ist anfänglich im Ruhezustand. Somit gilt zu Beginn der Simulationen:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= \mathbf{B}_{0+} + \mathbf{B}_{0-}, \\ \mathbf{B}_{0\pm} &= \frac{\pm n}{[(x^2 + (y \mp y_0)^2 + (z + z_0)^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\times \begin{pmatrix} 3x(z+z_0) \\ 3(y \mp y_0)(z+z_0) \\ -x^2 - (y \mp y_0)^2 + 2(z+z_0)^2 \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{uD} = 0. \quad (3.43)$$

Das Magnetfeld ergibt sich durch Superposition der beiden Dipolfelder. Als Dipoltiefe wird stets $z_0 = 1.5$ gewählt. Der Wert von n folgt aus der Bedingung $B_{0z_{\max}} = 1$. Ein solchermaßen gewähltes Feld weist die folgende Unterschiede zu dem in früheren Arbeiten (z. B. [27, 56]) meist verwendeten, von einem einzelnen horizontal gerichteten Dipol erzeugten Feld auf.

- Es gestattet die einfache Separation der aufgeprägten Wirbel, ohne dabei deren Profile wesentlich zu verändern. Dies wird in Abschnitt 3.3.2 ausgenutzt, um den Einfluß der bei kleinen Dipolabständen auftretenden Verscherung von der reinen Verdrillung zu trennen, wobei $y_0 = 0.5, 1$ und 2 verwendet werden.
- Es führt zu einer stärkeren Konzentration des photosphärischen Flusses und kommt dadurch der Modellierung der Flußverteilung in einer Sonnenfleckengruppe näher.
- Die Magnetfeldstärke fällt mit der Höhe über der Photosphäre deutlich schneller ab, wodurch der gesamte, innerhalb der Simulationsbox geschlossene Fluß aus dem Gebiet der zentralen Flußkonzentration entspringt und deshalb von den photosphärischen Wirbeln beeinflusst wird (Abb. 10). Dies macht das Modell als Referenzsystem für Untersuchungen des stabilisierenden Einflusses des oberhalb der Flußröhre gelegenen, unverdrillten Flusses geeignet, da es so gut wie keinen stabilisierenden Fluß enthält.

In diesem Kapitel werden drei unterschiedliche anfängliche Dichteverteilungen betrachtet:

$$\rho_0 = \begin{Bmatrix} B_0^2 \\ |\mathbf{BD}| \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.44)$$

Die erstgenannte Verteilung entspricht konstanter Alfvéngeschwindigkeit ($v_a = 1$ in der gesamten Box) zu Beginn der Simulationen, was praktische Vorteile für die Relaxation des Systems mit sich bringt und deshalb auch von Amari et al. [27] verwendet wurde. Hier führt sie aufgrund des stärkeren Abfalls der Magnetfeldstärke auf deutlich geringere Dichten in den äußeren Bereichen der Simulationsbox. Die konstante Dichteverteilung $\rho_0 = 1$ wurde z. B. von van Hoven et al. [55] und Tokman & Bellan [56] verwendet und wird hier zu Vergleichszwecken ebenfalls betrachtet. Die Verteilung $\rho_0 = |\mathbf{BD}|$ wird willkürlich als dazwischenliegender Fall gewählt. In der Sonnenkorona fällt die Alfvéngeschwindigkeit in aktiven Regionen leicht mit der Höhe ab (siehe z. B. [65]), was einer Dichteverteilung zwischen $\rho_0 = B_0^2$ und $\rho_0 = |\mathbf{BD}|$ entspricht. Unterschiedliche Dichteverteilungen werden in diesem Kapitel primär aus folgenden Gründen betrachtet.

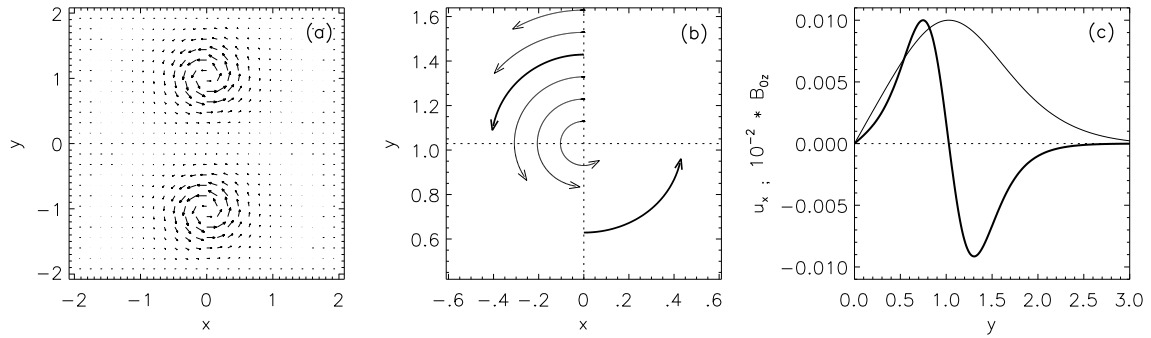


Abbildung 11: *a)*: aufgeprägtes Geschwindigkeitsfeld für $y_0 = 1$. *b)*: Trajektorien einiger Fluidelemente im oberen Wirbel nach $75\tau_a$ für $v_0 = 10^{-2}$. Das Wirbelzentrum befindet sich in $(0, 1.03, -\Delta z)$. Die Enden der fettgedruckten Pfeile kennzeichnen die Positionen, an denen die in Abb. 12 dargestellten Feldlinienbündel entspringen. *c)*: Profile der Wirbelgeschwindigkeit $u_x(0, y, -\Delta z)$ (*dicke Linie*) und der Normalkomponente des Magnetfeldes $B_{0z}(0, y, 0)$ (*dünne Linie*).

- Sie ermöglichen die Untersuchung des Einflusses der Trägheit des Plasmas auf die dynamische Entwicklung des Systems (Abschn. 3.3.2).
- Sie dienen dazu, die in der quasi-statischen Phase der Simulation erhaltenen Gleichgewichte auf ihre Kraftfreiheit zu überprüfen, da letztere von der gewählten Dichteverteilung unabhängig sein sollten (Abschn. 3.3.2 und 3.3.3).
- Der Fall $\rho_0 = B_0^2$ gestattet aufgrund der geringen Plasmadichte die Untersuchung der Defokussierung des magnetischen Flusses von der Flußröhrenachse; ein Effekt, der für die Ausbildung des Bereiches geringerer Dichte in CMEs mit Dreifachstruktur von Bedeutung sein könnte (Abschn. 3.4.2).

In sämtlichen in diesem Kapitel beschriebenen Simulationen wird die Rechnung mit einer vorbereitenden Phase begonnen, bei der die durch Diskretisierungsfehler bei der numerischen Bestimmung der Stromdichte erzeugten anfänglichen Lorentzkraftdichten reduziert werden. Hierzu wird die Anfangskonfiguration einer Relaxation bei abgeschalteten Wirbelbewegungen unterworfen, d.h. dem System wird erlaubt, sich eine Zeitlang frei zu entwickeln, um ein für die weitere Simulation akzeptables numerisches Gleichgewicht zu finden. Diese *Vorbereitungsphase* wird abgebrochen, sobald die normierten Lorentzkraftdichten unter 10^{-6} (d.h. um bis zu 4 Größenordnungen) gefallen sind. Anschließend wird mit der *Verdrillungsphase* begonnen.

3.2.2 Aufprägung der Wirbelbewegungen

Während der Verdrillungsphase wird in der ersten Gitterebene unterhalb der Grundfläche $\{z = 0\}$ der Simulationsbox ein Wirbelfeld aufgeprägt. Die Geschwindigkeiten sind dabei

stets entlang der Konturlinien von $B_{0z}(x, y, 0)$ gerichtet, so daß die Normalkomponente B_z des Magnetfeldes in der Grundfläche während der Simulation erhalten bleibt. Dies wird durch folgende Formulierung des Wirbelfeldes erreicht:

$$u_{x,y}(x, y, -\Delta z, t) = v_0 f(t) \nabla^\perp \{\zeta[B_{0z}(x, y, 0, 0)]\}, \quad (3.45)$$

$$u_z(x, y, -\Delta z, t) = 0. \quad (3.46)$$

Hierbei ist $\nabla^\perp := (\partial_y, -\partial_x)$. Das Wirbelprofil wird durch die Funktion

$$\zeta = B_{0z}^2 \exp((B_{0z}^2 - B_{0z_{\max}}^2)/\delta B^2),$$

festgelegt, die genau wie in Amari et al. [27] gewählt wird. Diese Funktion wird so normiert, daß das Maximum von $\nabla^\perp \zeta$ gleich eins ist. Es wird stets $\delta B = 1$ gesetzt, wodurch die Wirbelbreite annähernd mit der Ausdehnung der Flußkonzentration übereinstimmt. Die Wirbelgeschwindigkeiten nehmen mit dem Abstand von den Wirbelzentren sehr schnell ab. Die beiden derart erzeugten, im gleichen Umlaufsinn rotierenden Wirbel sind annähernd um die Dipolachsen zentriert (Abb. 11). Die Wirbelzentren liegen auf der y -Achse an den Stellen $\pm y_1$, wobei sich $y_1 = 0.69, 1.03$ und 2.0 für $y_0 = 0.5, 1.0$ bzw. 2.0 ergeben.

Für die Simulation einer quasi-statischen Entwicklung muß die maximale Wirbelgeschwindigkeit v_0 deutlich kleiner als die maximale Alfvéngeschwindigkeit des anfänglichen Gleichgewichts gewählt werden. Letztere ist für alle in Gl. (3.44) spezifizierten Dichteverteilungen eins oder sehr nahe bei eins. Es werden hier $v_0 = 10^{-2}$ und 10^{-3} verwendet. In der Literatur wurde bisher fast ausschließlich $v_0 = 10^{-2}$ und größer verwendet, was mindestens eine Größenordnung über den beobachteten Werten liegt.⁵ In den Abschn. 3.3.2 und 3.3.3 wird jedoch gezeigt, daß eine quasi-statische Entwicklung durch eine Folge kraftfreier Gleichgewichte kleinere Wirbelgeschwindigkeiten erfordert.

Die Funktion $f(t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung der aufgeprägten Wirbelgeschwindigkeiten. Sie werden zu Beginn der Verdrillungsphase innerhalb eines Zeitraumes $0 \leq t \leq t_{r1} = 10$ gleichmäßig von $f(0) = 0$ auf $f(t_{r1}) = 1$ erhöht, um ein sanftes Anwachsen der Verdrillung des Feldes zu Beginn der Simulation zu gewährleisten. Anschließend wird $f(t_{r1}) = 1$ während der gesamten Verdrillungsphase beibehalten. Wird eine abschließende *Relaxationsphase* durchgeführt, so wird $f(t)$ innerhalb von $t_{r2} = 1-5$ wieder auf Null gesenkt und anschließend auf Null gehalten, d.h. die Wirbel sind während der Relaxation ausgeschaltet.

3.2.3 Numerische Implementation

Dieser Abschnitt faßt die Numerik aus Gründen der Übersichtlichkeit relativ kompakt zusammen. Für Details wird an den relevanten Stellen auf Anhang A verwiesen.

Als physikalisches Gebiet wird ein Kubus der Größe $[-L_x, L_x] \times [-L_y, L_y] \times [0, L_z]$ betrachtet. Da sowohl die Anfangskonfiguration, Gln. (3.41)–(3.44), als auch das Wirbelfeld, Gln. (3.45)–(3.46), Liniensymmetrie bezüglich der z -Achse aufweisen und da

⁵Photosphärische Strömungen erreichen in der Regel Geschwindigkeiten von ca. $0.5 - 1 \text{ km/s}$, während die Alfvéngeschwindigkeit in der Korona bei ca. 1000 km/s liegt.

diese während der gesamten Simulation erhalten bleibt, kann die Simulationsbox auf $[-L_x, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ beschränkt werden. Innerhalb dieses Volumens werden die Gln. (3.37)–(3.39) auf einem kartesischen Gitter diskretisiert. Für die Simulationen dieses Kapitels werden $L_x = L_y = 100$ und $L_z = 200$ gewählt. Die Gitterpunktweite wächst von $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = \Delta z_{\min} = 0.03$ in der Umgebung des Ursprungs exponentiell bis auf $\Delta x_{\max} = \Delta y_{\max} = 9$ und $\Delta z_{\max} = 12$ an den äußeren Rändern an (Anhang A.1). Zur Formulierung der Randbedingungen werden in allen Raumrichtungen zwei Gitterpunktebenen hinzugefügt.⁶ Insgesamt beträgt die Anzahl der Gitterpunkte in den Simulationen dieses Kapitels $195 \times 165 \times 150$.

Das Gleichungssystem für den Variablenvektor $\mathbf{U} = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z)$ wird in die sogenannte fluiderhaltende Form transformiert:

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \partial_y \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \partial_z \mathbf{H}(\mathbf{U}) = 0. \quad (3.47)$$

Die Terme \mathbf{F}, \mathbf{G} und \mathbf{H} sind die nichtlinearen Flußterme [66]. Die sich ergebenden Gleichungen sind in Anhang A.2 aufgeführt.

Zur numerischen Integration wird ein Lax-Wendroff-Verfahren herangezogen. Es wurde gemäß der Formulierung von Ugai und Tsuda [66] implementiert und den Erfordernissen dieser Arbeit entsprechend modifiziert (Anhang A.3). Während der Integration wird ein variabler Zeitschritt unter Berücksichtigung des Courant-Friedrichs-Levy-Kriteriums verwendet (Anhang A.4).

In den Simulationen dieser Arbeit werden an den seitlichen Rändern und am oberen Rand der Simulationsbox stets feste Randbedingungen verwendet, was aufgrund der hinreichend groß gewählten Boxen gerechtfertigt ist. In der Ebene $\{y = 0\}$ werden die Integrationsvariablen der z -Liniensymmetrie entsprechend gespiegelt. Am unteren Rand $\{0, 0, -\Delta z\}$ werden die Geschwindigkeiten entweder gemäß der Gln. (3.45)–(3.46) vorgegeben (Simulationen mit kontinuierlicher Verdrillung) oder gleich Null gesetzt (Relaxationsrechnungen, Simulationen der Kapitel 4 und 5). Die aufgeprägten Wirbelbewegungen führen zu einer (numerisch problematischen) Verzerrung der Konfiguration in der Grundfläche. Um dieser entgegenzuwirken, werden die Randwerte der Integrationsvariablen teilweise durch Extrapolation aus dem Integrationsgebiet ermittelt. Eine ausführliche Darstellung der Randbedingungen findet sich in Anhang A.5.

Zur Stabilisierung des numerischen Verfahrens wird eine künstliche Diffusion (engl. artificial smoothing) [67] herangezogen. Dies ist trotz der relativ hohen Diffusivität des Lax-Wendroff-Verfahrens und trotz der Einbeziehung der Viskosität (Gl. (2.13)) aus folgenden Gründen vonnöten.

- Die zur Verfolgung des Auftriegs der magnetischen Flußsystems benötigten großen Simulationsboxen führen zu einer extrem hohen Variation der Plasmadichte innerhalb der Box (für den Fall $\rho_0 = B_0^2$ um bis zu 17 Größenordnungen).

⁶Für die in dieser Arbeit beschriebenen idealen MHD-Simulationen würde eine Gitterpunktebene zur Formulierung der Randbedingungen genügen. Da jedoch der Simulationscode bereits die resistive MHD berücksichtigt, werden zwei Gitterpunktebenen verwendet.

- Die dem System aufgeprägten Wirbel führen zu einer starken Verzerrung der Konfiguration an der Grundfläche, der neben geeigneten Randbedingungen (s. o.) auch eine erhöhte numerische Diffusion entgegenzusetzen ist.
- Die an der Grenze zwischen verdrilltem und unverdrilltem Fluß auftretenden Spannungen (insbesondere in Gebieten hoher Trägheit) sowie die stark dynamische Entwicklung während des Aufstiegs des Flußsystems erfordern gute Stabilitätseigenschaften.

Details zur numerischen Diffusion sind in Anhang A.6 dargestellt. Für die in den Simulationen dieses Kapitels verwendeten Parameter der numerischen Diffusion siehe die Tabellen 1 und 2 in Abschn. 3.3.2 bzw. 3.3.3.

3.3 Quasi-statische und dynamische Entwicklung

Im folgenden wird zunächst eine Referenzsimulation mit typischen Werten der Parameter y_0 , $\rho_0(\mathbf{x})$ und v_0 ausführlich beschrieben (Abschn. 3.3.1). Wesentliche Charakteristika des aufsteigenden verdrillten Flusses, die Entwicklung der magnetischen Energie und der Stromdichte, sowie Abweichungen vom kraftfreien Zustand werden für diesen Parametersatz diskutiert. Anschließend wird in Abschn. 3.3.2 zu einer Parameterstudie übergegangen, bei der y_0 , $\rho_0(\mathbf{x})$ und v_0 variiert werden. Abschn. 3.3.3 beschreibt Relaxationsrechnungen des Systems zur Ermittlung der kritischen Verdrillung.

3.3.1 Referenzsimulation

Für die Referenzsimulation werden $y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$ und $v_0 = 10^{-2}$ gewählt. In der Anfangskonfiguration sind sämtliche Feldlinien des Magnetfeldes symmetrisch bezüglich der $\{y = 0\}$ -Ebene. Die meisten der im Wirbelgebiet verankerten Feldlinien schließen sich innerhalb des betrachteten physikalischen Volumens und verbinden die Halbebenen $\{x, y > 0, 0\}$ und $\{x, y < 0, 0\}$. Die die Wirbelzentren verbindende *zentrale Feldlinie* besitzt anfänglich die Apexhöhe $h_0 = 1.22$ und die Länge $L_0 = 3.50$. Der zentralen Feldlinie wird mit Hilfe des Ausdrucks

$$F = \frac{V}{\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}} = \int \frac{\pi r^2(s)}{|\mathbf{B}(s)| \pi r^2(s)} ds = \int |\mathbf{B}|^{-1} ds$$

ein (auf den magnetischen Fluß der Flußröhre normiertes) Volumen zugeordnet, wobei das Integral entlang der zentralen Feldlinie auszuführen ist und $r(s)$ den (ortsabhängigen) Radius der Flußröhre bezeichnet. Die Größe F ist für die Diagnose der Flußröhrenentwicklung von Nutzen [27]. Ihr Anfangswert beträgt $F_0 = 14.5$.

Unmittelbar nach dem Einschalten der Wirbel beginnen die im Wirbelgebiet verankerten Feldlinien in alle drei Raumrichtungen zu expandieren. Ein solches Verhalten ist zu erwarten, da die anwachsende Azimutalkomponente des Magnetfeldes wie ein zusätzlicher Plasmadruck wirkt [68] (ein völlig analoges Verhalten tritt bei der Verscherung magnetischer Arkaden auf). Die Feldlinien nehmen eine helische Struktur an und lassen sich in drei Gruppen einteilen, die sich verschiedenartig entwickeln (Abb. 12, siehe auch [56]).

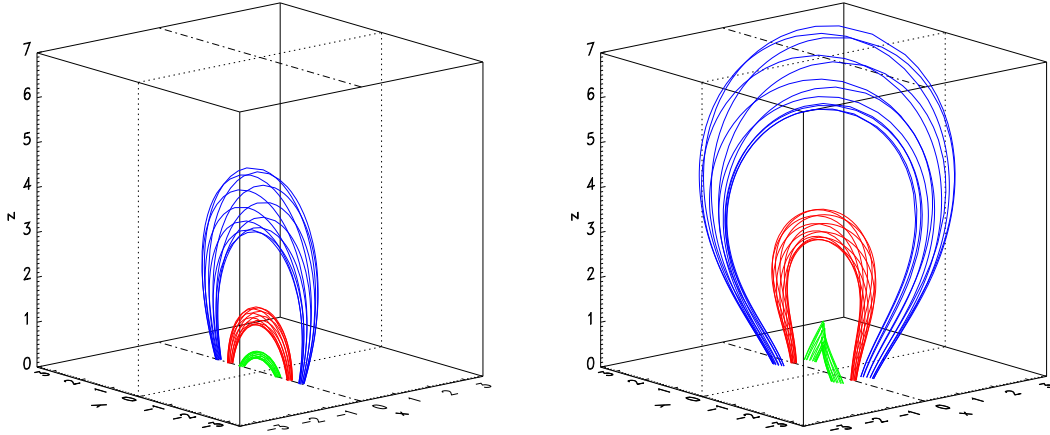


Abbildung 12: Entwicklung der drei Gruppen magnetischer Feldlinien, die direkt durch die Wirbelbewegungen beeinflusst werden: „innere“ Feldlinien (*grün*), „zentrale“ Feldlinien (*rot*) und „äußere“ Feldlinien (*blau*). Dargestellt ist die Referenzsimulation mit $y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$ und $v_0 = 10^{-2}$ zu den Zeitpunkten $t = 0$ (*links*) und $t = 75$ (*rechts*).

- *Zentrale Feldlinien* starten in der unmittelbaren Umgebung der Wirbelzentren. Sie erfahren die stärkste Verdrillung in der Grundfläche (Abb. 11) und bilden die sich aufwärts und seitlich ausdehnende *zentrale verdrillte Flußröhre*, deren Fußpunktposition während der Simulation erhalten bleibt.
- *Innere Feldlinien* starten anfänglich im Bereich zwischen den Wirbelzentren. Sie werden überwiegend verschert und durch die daraus resultierende anfängliche Erhöhung ihrer Fußpunktstände in die Länge gezogen. Diese Feldlinien expandieren nur leicht. Ihre Projektion auf die Grundfläche weist eine deutliche inverse S-Form auf, die sich unmittelbar auf die Verschierung zurückführen läßt.
- *Äußere Feldlinien* starten anfänglich im Bereich jenseits der Wirbelzentren. Sie weisen die stärkste Expansion auf, während ihre Fußpunktstände anfänglich abnehmen. Im Gegensatz zu den inneren Feldlinien zeigt ihre Projektion auf die Grundfläche aufgrund der entgegengesetzten Fußpunktverschiebungen eine S-Form.

Die genannten Flußsysteme gehen kontinuierlich ineinander über, es läßt sich keine scharfe Grenze zwischen der zentralen Flußröhre und dem inneren und äußeren Fluß ziehen. Die zentrale Flußröhre bildet zunächst ein inverses S aus (analog zu den inneren Feldlinien), ändert ihre Form jedoch relativ frühzeitig (während die Entwicklung noch quasi-statisch verläuft), um für den Rest der Simulation dieselbe Form wie die äußeren Feldlinien aufzuweisen. Die sigmoidale (S- oder inverse S-) Form des verdrillten Flusses wird in Abschn. 3.4.3 genauer behandelt.

Im folgenden werden die geometrischen Parameter der Flußröhre (Apexhöhe h , Länge L und Volumen F) sowie ihre Aufstiegsgeschwindigkeit stets an der zentrale Feldlinie, die

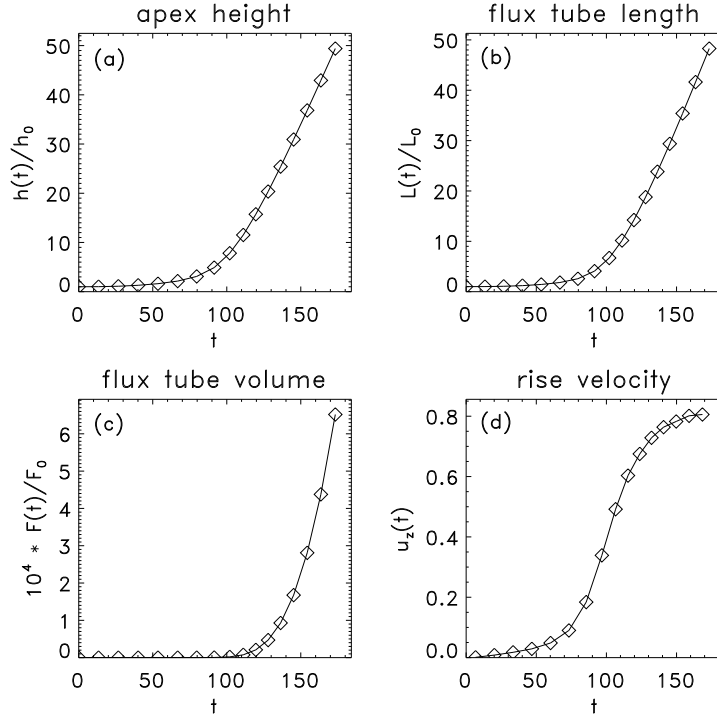


Abbildung 13: Entwicklung der Höhe, der Länge, des Volumens und der Aufstiegsgeschwindigkeit der zentralen Flußröhre während der Referenzsimulation. Der Übergang von der quasi-statischen zur dynamischen Phase der Entwicklung findet bei $t \approx 75$ statt.

mit der Achse der Flußröhre identifiziert werden kann, diagnostiziert. Die Entwicklung der zentralen Flußröhre läßt sich in eine quasi-statische Phase und eine dynamische Phase unterteilen. Die beiden Phasen sind klar unterscheidbar, wie aus den geometrischen Parametern und der Aufstiegsgeschwindigkeit der Flußröhre deutlich hervorgeht (Abb. 13). Die Geschwindigkeit der Flußröhre steigt während der gesamten Simulation monoton an, bleibt jedoch bis $t \approx 75$ klein ($|\mathbf{u}| \ll \mathbf{v}_a$). Die in Abschn. 3.3.3 behandelten Relaxationsrechnungen zeigen, daß die Flußröhre bis zu diesem Zeitpunkt nahezu kraftfrei bleibt und somit eine Folge annähernder Gleichgewichtszustände durchläuft. Während der Zeitspanne $t \approx 75$ –130 wird die Flußröhre fast bis auf Alfvéngeschwindigkeit beschleunigt, anschließend verläuft ihre Expansion nahezu gleichförmig und nahezu selbstähnlich (es gilt $F \propto L^{2.2}$ während der quasi-statischen und $F \propto L^{2.9}$ während der dynamischen Phase). Die starke Beschleunigung und die daraus resultierende rapide Expansion deuten darauf hin, daß das System in der dynamischen Phase $t \gtrsim 75$ keinen neuen Gleichgewichtszustand finden kann und ausbricht. Dies stimmt mit den Ergebnissen von Amari et al. [27] trotz der unterschiedlichen verwendeten Anfangskonfigurationen überein und untermauert die in Amari et al. [27] gezogene Schlußfolgerung, daß magnetische Flußröhren für hinreichend starke Verdrillung ausbrechen.

Der äußere Fluß expandiert während der gesamten Simulation stärker als die zentrale

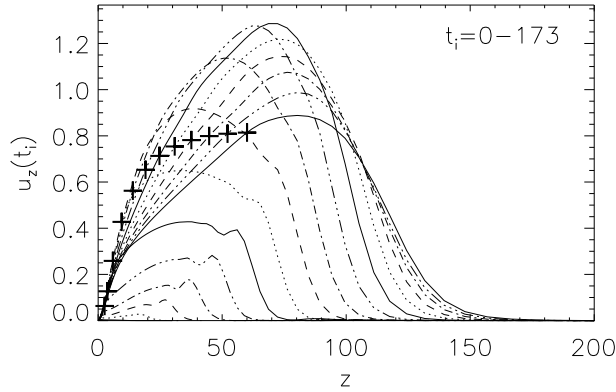


Abbildung 14: Geschwindigkeiten entlang der z -Achse zu verschiedenen Zeitpunkten der Referenzsimulation. Aufgrund der z -Liniensymmetrie gilt $u_x(0, 0, z) = u_y(0, 0, z) = 0$. Die einzelnen Zeitpunkte stimmen mit den in Abb. 13 a-c gezeigten Datenpunkten überein. Die Kreuze kennzeichnen die jeweilige Apexhöhe der zentralen Flußröhre.

Flußröhre (Abb. 14). Die dabei auftretenden, leicht über-Alfvénschen Geschwindigkeiten sind auf die Vernachlässigung des thermischen Drucks zurückzuführen. Die Ausbreitung des äußeren Flusses wird erst beim Eintritt in das Gebiet erhöhter numerischer Diffusion (siehe Anhang A.6) abgebremst.⁷ Auf mögliche Zusammenhänge der Expansion des äußeren Flusses mit der Dreifachstruktur von CMEs wird in Abschnitt 3.4.2 eingegangen.

Durch den Einfluß der aufgeprägten Wirbel entfernt sich das Magnetfeld zunehmend von seiner anfänglichen Potentialfeldstruktur, die freie magnetische Energie wächst an und es kommt zur Ausbildung hoher Stromdichten. Die „relative magnetische Energie“ $W(t)/W_0$, wobei W_0 die magnetische Energie des anfänglichen Potentialfeldes bezeichnet, wächst während der gesamten Rechnung monoton an (Abb. 15 a). Lediglich eine leichte Sättigung ist im Verlauf der dynamischen Phase zu erkennen, während der die in das System eingespeiste Energie nicht nur in magnetische Energie, sondern zunehmend auch in kinetische Energie des Plasmas umgewandelt wird. Am Ende der Simulation beträgt die kinetische Energie etwa sieben Prozent der gesamten Energiezunahme des Systems.⁸

Die stärksten Stromkonzentrationen bilden sich in der Umgebung der Wirbelzentren aufgrund der starken Verdrillung der zentralen Feldlinien. Darüber hinaus führt die Verscherung zwischen den Wirbelzentren zur Bildung einer zentralen Stromschicht, deren Form den inneren Feldlinien nachgezeichnet ist (Abb. 16). Die Verscherung und die aus ihr resultierenden Ströme nehmen bei Verringerung des Wirbelabstandes zu (siehe Abschn. 3.3.2). Der Gesamtstrom durch die Grundfläche ($|x| \leq L_x, |y| \leq L_y$) des physikali-

⁷Dies wurde durch eine Vergleichssimulation mit konstanter numerischer Diffusion geprüft. In dieser konnte jedoch die Entwicklung des Systems aufgrund numerischer Instabilitäten nicht so lange wie in der Referenzsimulation verfolgt werden.

⁸Es ist zu beachten, daß der Wert der kinetischen Energie durch die insbesondere in den oberen Bereichen der Simulationsbox hohe numerische Diffusion stark beeinflusst wird.

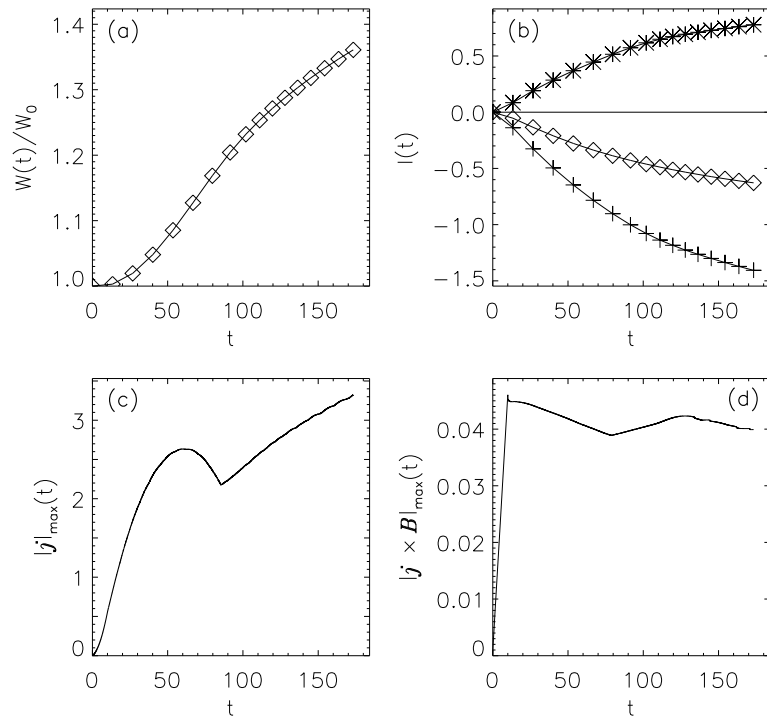


Abbildung 15: Entwicklung der „relativen magnetischen Energie“ (a), des Stromes durch die Halbebene $\{x, y > 0, 0\}$ (b); *Kreuze*: „Hauptstrom“, *Sternchen*: „Umkehrstrom“, *Rautensymbole*: Nettostrom) und der maximalen Stromdichte (c) bzw. Lorentzkraftdichte (d) in der gesamten Simulationsbox während der Referenzsimulation.

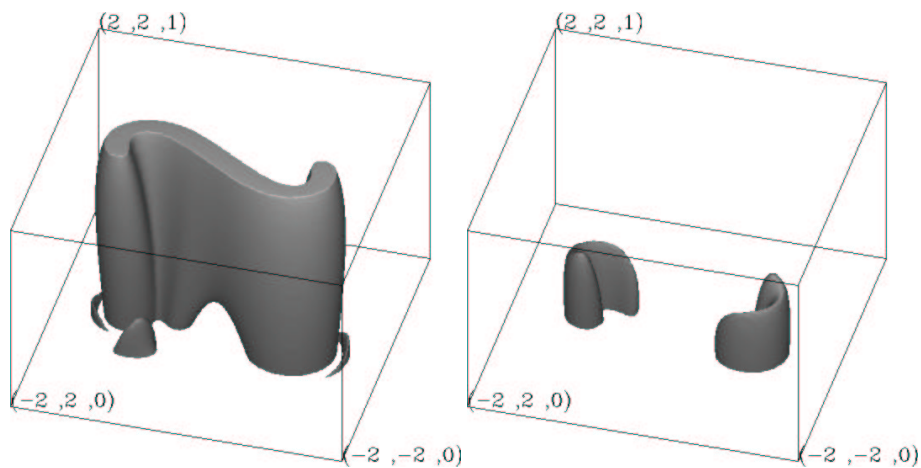


Abbildung 16: Isoflächen $|j| = 0.2 j_{\max}$ (links) und $|j| = 0.5 j_{\max}$ (rechts) zum Zeitpunkt $t = 75$ der Referenzsimulation .

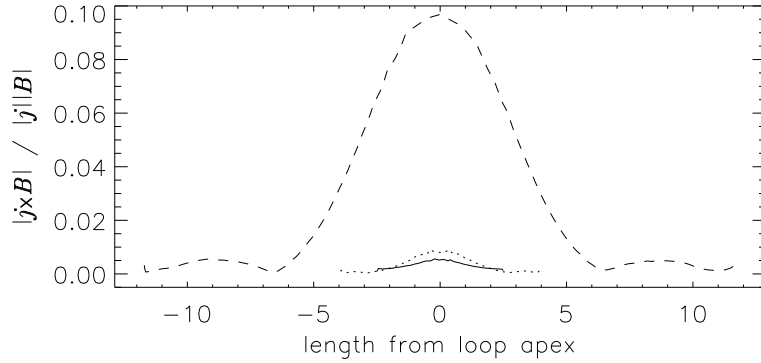


Abbildung 17: „Relative Lorentzkraftdichte“ $|\mathbf{j} \times \mathbf{B}|/|\mathbf{j}||\mathbf{B}|$ entlang der zentralen Feldlinie zu den Zeitpunkten $t = 54$ (*durchgezogene Linie*), $t = 75$ (*gepunktete Linie*) und $t = 102$ (*gestrichelte Linie*) der Referenzsimulation.

schen Gebietes ist aufgrund der Symmetrie des Systems Null. Auch der Gesamtstrom durch die Grundfläche ($|x| \leq L_x$, $0 \leq |y| \leq L_y$) der Simulationsbox muß für hinreichend große Dipolabstände aufgrund der Kompaktheit der Wirbel (die Wirbelgeschwindigkeiten an den seitlichen Rändern sind vernachlässigbar klein) verschwinden, wie man durch Anwendung des Stokesschen Satzes auf Gl. (3.40) sieht. Dies führt zur Ausbildung eines „Umkehrstromes“ in der Umgebung der zentralen Flußröhre, der dem im Inneren der Röhre fließenden „Hauptstrom“ entgegengesetzt ist. Aufgrund der Verscherung zwischen den Wirbelzentren (die Wirbel erstrecken sich für $y_0 \leq 1$ bis zum Koordinatenursprung, siehe Abb. 11 c) verbleibt in der Grundfläche der Simulationsbox ein Nettostrom (Abb. 15 b), der jedoch für größere Wirbelabstände vernachlässigbar klein bleibt (für $y_0 = 2$ liegt er bereits um einen Faktor 20 unter dem Wert der Referenzsimulation).

Die Lorentzkraftdichten bleiben während der gesamten Simulation um mehr als eine Größenordnung kleiner als die Stromdichten (Abb. 15 c,d). Dies ist in der quasi-statischen Phase zu erwarten, überrascht jedoch in der dynamischen Phase, in der man das Auftreten hoher Kräfte erwartet. Die trotz der relativ geringen Kräfte auftretende hohe Dynamik des Systems ist daher auf die geringe Trägheit des Plasmas zurückzuführen. Die Abb. 15 c,d geben keine Auskunft über die Abweichung des Systems vom kraftfreien Zustand, da $|\mathbf{j}|$ und $|\mathbf{f}|$ ihre Maxima nicht notwendigerweise an denselben Gitterpunkten annehmen. Abb. 17 zeigt die Größe $|\mathbf{j} \times \mathbf{B}|/|\mathbf{j}||\mathbf{B}|$, die ein Maß für den Winkel zwischen \mathbf{j} und \mathbf{B} darstellt. Man sieht deutlich, daß zu Beginn der dynamischen Phase ($t \gtrsim 75$) am Apex der Flußröhre eine Abweichung vom kraftfreien Zustand auftritt, die während der dynamischen Phase weiter anwächst, insgesamt jedoch relativ klein bleibt. Auf die Abweichung des Systems vom kraftfreien Zustand wird in Abschn. 3.3.3 ausführlich eingegangen. Der Rest dieses Abschnittes beschäftigt sich mit der Messung der Verdrillung des Systems.

Die *globale Verdrillung*, d.h. die gesamte durch die Wirbel eingespeiste Verdrillung der

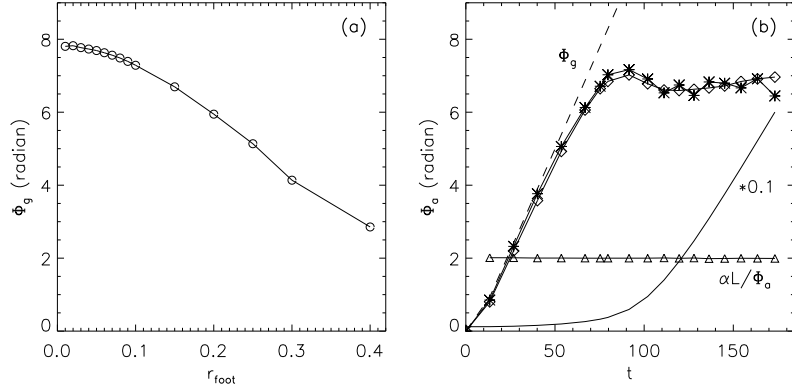


Abbildung 18: Verdrillung der zentralen Flußröhre in der Referenzsimulation. *a)*: Eingepeiste globale Verdrillung als Funktion des Fußpunktradius r_{foot} zum Zeitpunkt $t = 75$. *b)*: Entwicklung der Verdrillung am Apex der Flußröhre mit $r_{\text{foot}} = 0.01$ (*Sternchen*) und $r_{\text{foot}} = 0.1$ (*Rautensymbole*). Abgebildet sind außerdem die globale Verdrillung (*gestrichelte Linie*), $\alpha L/\Phi_a$ am Apex (*Dreiecke*) und die skalierte Apexhöhe $0.1h/h_0$ (*durchgezogene Linie*).

zentralen Flußröhre, läßt sich mit Hilfe der Wirbelgeschwindigkeiten berechnen:

$$\Phi_g = \frac{2}{r_{\text{foot}}} \bar{u}(r_{\text{foot}}) t, \quad (3.48)$$

wobei $\bar{u}(r_{\text{foot}})$ die mittlere Wirbelgeschwindigkeit entlang des Kreises mit Radius r_{foot} und Mittelpunkt $(0, y_1, -\Delta z)$ ist. Φ_g ist in Abb.18 links für verschiedene Fußpunktradien aufgetragen. Der innere Bereich der zentralen Flußröhre ($r_{\text{foot}} \lesssim 0.1$) ist annähernd gleichmäßig verdrillt (siehe auch Abb. 11 c). Die *lokale Verdrillung* am Apex der zentralen Flußröhre wird ebenfalls gemessen. Sie wird unter Verwendung lokaler Zylinderkoordinaten r , φ und \hat{z} , die an der Flußröhrenachse ausgerichtet werden, und der Länge L der zentralen Feldlinie analog zu Gl. (2.30) definiert:

$$\Phi_a = \frac{L |B_\varphi(r_{\text{apex}})|}{r_{\text{apex}} B_{\hat{z}}(r_{\text{apex}})}. \quad (3.49)$$

Hierbei wird r_{apex} für ein gegebenes r_{foot} unter Verwendung der Flußerhaltung in magnetischen Flußröhren (siehe Abschn. 2.2) ermittelt, wobei $r_{\text{apex}} = (B_{0z_{\text{max}}}/B_{\hat{z}_{\text{apex}}})^{1/2} r_{\text{foot}}$ gesetzt wird. Die der Berechnung der Verdrillung zugrundegelegte Annahme kreisförmigen Flußröhrenquerschnittes ist an den Fußpunkten und am Apex der zentralen Flußröhre für alle Simulationen mit $\rho_0 = B_0^2$ während der gesamten Rechnung und für alle anderen Simulationen während der quasi-statischen Phase in guter Näherung erfüllt. Der Wert von Φ_a wird am Apex der Flußröhre durch Mittelung über den Azimutwinkel im lokalen Zylinderkoordinatensystem erhalten. Aus Abb. 18 b ist zu entnehmen, daß auch Φ_a für $r_{\text{foot}} \lesssim 0.1$ annähernd konstant ist. Im folgenden werden die globale und die lokale Verdrillung stets für den exemplarischen Fußpunktradius $r_{\text{foot}} = 0.03$ bestimmt.

Aufgrund der annähernd gleichförmigen Verdrillung für $r_{\text{apex}}(r_{\text{foot}} \leq 0.1) \ll L$ und den relativ geringen Lorentzkraftdichten liegt es nahe, den inneren Bereich der zentralen Flußröhre mit der bekannten Lösung für das gleichförmig verdrillte, kraftfreie Gleichgewicht nach Gold-Hoyle [37] (siehe Abschn. 2.2) zu vergleichen. In Abb. 18 b ist die Entwicklung der Größe $\alpha L/\Phi_a$ aufgetragen, wobei α am Apex der zentralen Feldlinie bestimmt wird. Es findet sich während der gesamten Simulation eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit dem exakten Wert $\alpha L/\Phi = 2$ im Gold-Hoyle Gleichgewicht. Dies ist ein weiteres Indiz für eine geringe Abweichung des System vom kraftfreien Zustand. Hieraus kann jedoch nicht auf die Existenz eines globalen Gleichgewichts geschlossen werden, da Φ_a lediglich eine lokale Größe darstellt.

In Abb. 18 b ist des weiteren die zeitliche Entwicklung der Größen Φ_g und Φ_a dargestellt. Während der quasi-statischen Phase stimmen beide nahezu überein, was auf eine Gleichverteilung der Verdrillung entlang der zentralen Flußröhre in dieser Phase hinweist. Die dynamische Phase setzt bei einer Verdrillung von $\Phi_g \sim 2.6\pi$ und $\Phi_a \sim 2.1\pi$ ein. Beide Werte sind relativ nahe am Schwellwert $\Phi_{\text{GH}} \approx 2.49\pi$ der Kink-Instabilität des Gold-Hoyle Gleichgewichts [41]. Auf einen möglichen Zusammenhang zwischen der dynamischen Entwicklung der zentralen Flußröhre und der Kink-Instabilität wird in Abschn. 3.3.3 eingegangen. Es fällt auf, daß während der rapiden Expansion der Flußröhre in der dynamischen Phase Φ_a annähernd gleich bleibt, obwohl Φ_g weiterhin linear zunimmt. Dies deutet darauf hin, daß sich die kontinuierlich in der Grundfläche der Simulationsbox eingespeiste Verdrillung in dieser Phase auf den oberen Teil der Flußröhre nicht mehr auswirkt, was vermutlich in dessen schnellem Aufstieg begründet ist.

3.3.2 Parameterstudie

Die in diesem Abschnitt beschriebene Parameterstudie ist wie folgt motiviert.

- Untersuchungen verscherter magnetischer Arkaden mit Translationsinvarianz in Richtung der Verscherung ergaben ein rasches Aufsteigen der Arkade (in einer Sequenz idealer MHD-Gleichgewichte), wenn die Fußpunkte auf beiden Seiten der Arkadenachse um mehr als 2.5 Fußpunktabstände gegenüber der anfänglichen stromfreien Konfiguration verschoben wurden [19, 20]. Derartig hohe Verscherungen übertreffen die in photosphärischen Magnetfeldern beobachteten Verscherungen deutlich, treten jedoch in dem in Abschn. 3.3.1 beschriebenen Referenzsystem im Bereich zwischen den Wirbeln ebenfalls auf, wenn es hinreichend lange den Wirbelbewegungen ausgesetzt wird.⁹ Obwohl die Ergebnisse der Referenzsimulation nicht darauf hindeuten, daß der Aufstieg der zentralen Flußröhre aus der Region der versicherten inneren Feldlinien angetrieben wird (siehe Abb. 14), soll im folgenden geklärt werden, in welchem Maße Scherströmungen die Entwicklung des Systems beeinflussen.¹⁰

⁹Dies gilt auch für die Simulationen von Amari et al. [27] und Tokman & Bellan [56].

¹⁰Amari et al. schreiben in [69], daß eine verdrillte Flußröhre auch für kleinere als die in [27] auftretenden Verscherungen ausbricht, geben jedoch weder an, wie stark die Verscherung variiert wurde, noch welche quantitativen Beziehungen zwischen der Verscherung und dem Aufstiegsverhalten der Flußröhre bestehen.

- Die Verteilung der Plasmadichte sollte in der quasi-statischen Phase keinen Einfluß auf die Entwicklung des Systems haben, solange in dieser Phase keine Verzweigungen (Bifurkationen) in der Folge kraftfreier Gleichgewichtszustände auftreten und solange die Wirbelgeschwindigkeiten klein genug sind, so daß die Trägheit des Plasmas das Erreichen eines benachbarten Gleichgewichts nicht verhindert. Es ist jedoch zu erwarten, daß die Dichteverteilung einen starken Einfluß auf die Expansion des Systems in der dynamischen Phase hat, während der die zentrale Flußröhre in der Referenzsimulation annähernd auf Alfvéngeschwindigkeit beschleunigt wird. Im folgenden soll der Einfluß der Trägheit des Plasmas auf die Entwicklung des Systems untersucht werden.

Tabelle 1 gibt einen Überblick über die in den Simulationen verwendeten Parameter.

• Einfluß der Scherströmungen

Um die Einflüsse der Verscherung und der Verdrillung des Systems auf dessen Entwicklung zu separieren, wird die Referenzsimulation ($y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$, $v_0 = 10^{-2}$) mit $y_0 = 0.5$ und $y_0 = 2$ wiederholt. Im Unterschied zu Amari et al. [27] läßt sich der Abstand zwischen den Wirbeln mit dem hier gewählten Magnetfeldmodell durch Veränderung des Parameters y_0 variieren (siehe Gl. (3.42)), ohne dabei eine nennenswerte Veränderung des Wirbelprofils zu erzeugen. Somit beeinflußt die Änderung von y_0 vorrangig die Verscherung, während die Verdrillung des Systems weitgehend unbeeinflusst bleibt. Die durch die Verscherung zwischen den Wirbeln erzeugten Stromdichten sind für $y_0 = 2$ vernachlässigbar klein und nehmen für abnehmendes y_0 zu. Für $y_0 = 0.5$ erreichen sie bereits ca. sechzig Prozent der

v_0	ρ_0	y_0	ν_{out}	$1 - \sigma_u$	$1 - \sigma_{\rho, \text{in}}$	$1 - \sigma_{\rho, \text{out}}$
0.01	B_0^2	0.5	0.1–1	0.0005	0.0005	0.0005–0.1
0.01	B_0^2	1.0	0.1–1	0.0005	0.0005	0.0005–0.1
0.01	B_0^2	2.0	0.1–1	0.0005	0.0005	0.0005–0.1
0.01	$ \mathbf{B}_0 $	1.0	0.1–1	0.0005	0.0005	0.0005–0.1
0.01	1	1.0	0.1–1	0.0005	0.0005	0.0005–0.1
0.001	B_0^2	1.0	0.1	0.0005	0.0005	0.0005–0.01
0.001	$ \mathbf{B}_0 $	1.0	0.1	0.0001	0.0001	0.0001

Tabelle 1: Parameter der Simulationen mit kontinuierlicher Verdrillung des Systems. σ_u und σ_ρ sind die Parameter der künstlichen Diffusion der Variablen $\rho u_{x,y,z}$ bzw. ρ . Die Indizes *in* und *out* beziehen sich auf den zentralen Bereich der Simulationsbox mit räumlich konstantem ν und σ bzw. auf den Rest der Box (siehe Anhang A.6). Es gilt in allen Simulationen $\nu_{\text{in}} = 0.1$.

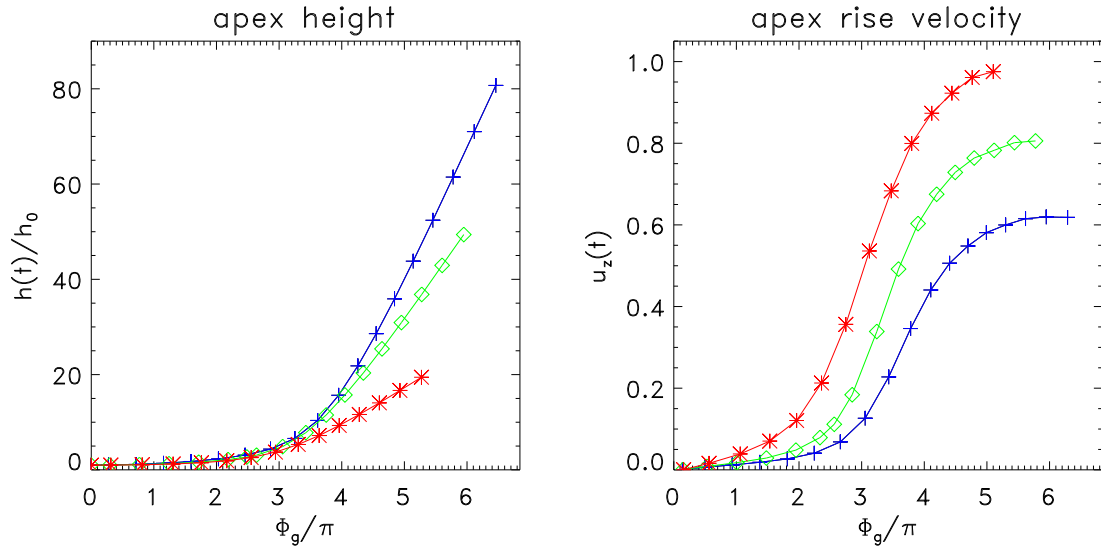


Abbildung 19: Entwicklung der Apexhöhe und der Aufstiegsgeschwindigkeit der zentralen Flußröhre als Funktion der globalen Verdrillung für drei unterschiedliche Dipolabstände $2y_0$: $y_0 = 0.5$ (blau), $y_0 = 1$ (grün) und $y_0 = 2$ (rot). Die Anfangshöhen betragen $h_0 = 0.67, 1.22$ und 3.24 für $y_0 = 0.5, 1$ bzw. 2 . In allen drei Simulationen ist $\rho_0 = B_0^2$ und $v_0 = 10^{-2}$.

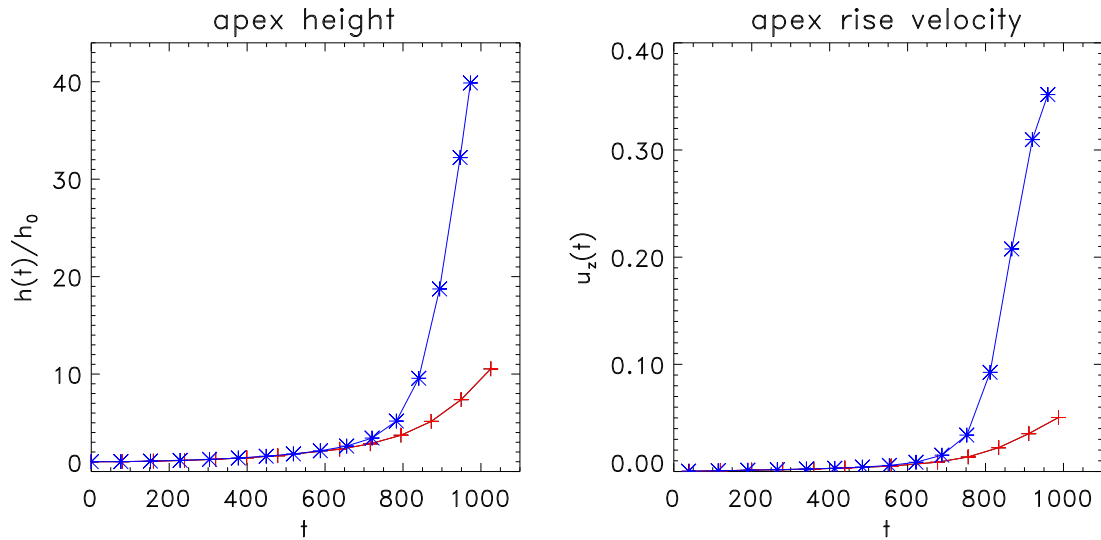


Abbildung 20: Entwicklung der Apexhöhe und der Aufstiegsgeschwindigkeit der zentralen Flußröhre für zwei unterschiedliche anfängliche Dichteverteilungen: $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$ (rot) und $\rho_0 = B_0^2$ (blau). In beiden Simulationen ist $y_0 = 1$ und $v_0 = 10^{-3}$.

durch die reine Verdrillung in der Umgebung der Wirbelzentren erzeugten Werte (siehe Abb. 16 für den Fall $y_0 = 1$).

Aus Abb. 19 geht hervor, daß die Entwicklung der zentralen Flußröhre für alle hier verwendeten Werte von y_0 qualitativ ähnlich ist. In allen drei Fällen läßt sich die Entwicklung in eine quasi-statische und eine dynamische Phase aufspalten, was die Erwartung (aus Abb. 14 und aus [69]), daß eine hinreichend verdrillte Flußröhre auch in der Abwesenheit von Verscherung ausbricht, bestätigt.

In Abb. 19 ist auch zu erkennen, daß das System mit $y_0 = 2$, das am geringsten verschert wird und das daher auch den kleinsten Gesamtstrom aufweist, für die geringste globale Verdrillung dynamisch wird. Dies ist auf einen sekundären Effekt der Variation von y_0 zurückzuführen: der Anteil des innerhalb der Simulationsbox geschlossenen magnetischen Flusses nimmt mit größerem y_0 ab und die mittlere, den geschlossenen Fluß antreibende Wirbelgeschwindigkeit nimmt zu.

• Einfluß der Trägheit des Plasmas

Zur Untersuchung des Einflusses der Trägheit des Plasmas auf die Entwicklung des Systems werden (bei festem $y_0 = 1$) die anfänglichen Dichteverteilungen $\rho_0 = 1$, $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$ und $\rho_0 = B_0^2$ sowie die maximalen Wirbelgeschwindigkeiten $v_0 = 10^{-2}$ und $v_0 = 10^{-3}$ verwendet. Die Dichteprofile variieren in den Höhen, die der verdrillte magnetische Fluß während der dynamischen Phase der Referenzsimulation erreicht, um mehrere Größenordnungen.

Zunächst wurde die Referenzsimulation ($y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$, $v_0 = 10^{-2}$) mit $\rho_0 = 1$ und $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$ wiederholt. Dabei war bereits innerhalb des Zeitintervalls $0 \lesssim t \lesssim 80$, das der quasi-statischen Phase der Referenzsimulation entspricht, eine systematische Verzögerung des Aufstiegs der zentralen Flußröhre mit steigender Dichte zu erkennen. Dies deutet darauf hin, daß eine quasi-statische Entwicklung kleinere Wirbelgeschwindigkeiten erfordert, damit das System nahe am kraftfreien Zustand verbleibt.¹¹ Besonders deutliche Unterschiede des Aufstiegsverhaltens traten im Zeitintervall $80 \lesssim t \lesssim 200$ auf, das der dynamischen Phase der Referenzsimulation entspricht. Die Aufstiegs geschwindigkeit der zentralen Flußröhre erreichte während dieses Zeitintervalls lediglich ≈ 0.2 für $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$ und ≈ 0.02 für $\rho_0 = 1$.

Aus diesem Grunde wurden die Fälle $\rho_0 = B_0^2$ und $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$ mit $v_0 = 10^{-3}$ wiederholt. Mit diesen Parametern ist die Entwicklung der zentralen Flußröhre während der quasi-statischen Phase nun nahezu unabhängig vom gewählten Dichteprofil. Während der dynamischen Phase weisen die Aufstiegs geschwindigkeiten und die entsprechenden Beschleunigungen eine starke Abhängigkeit von der Dichteverteilung auf, die allgemeine dynamische Entwicklung ist jedoch qualitativ ähnlich (Abb. 20).

Dieses Ergebnis zeigt, daß sich in numerischen Simulationen hochgradig verdrillte Flußröhren erzeugen lassen, wenn man, wie z. B. Tokman & Bellan [56], die Plasmadichten groß genug wählt (z. B. $\rho = 1$) und hohe Wirbelgeschwindigkeiten ansetzt ($v_0 > 10^{-2}$). Die so erhaltenen Konfigurationen sind jedoch nur dem Anschein nach quasi-statisch: die Geschwindigkeiten bleiben zwar aufgrund der hohen Trägheit des Plasmas klein ($|\mathbf{u}| \ll v_a$),

¹¹Dies wird in Abschnitt 3.3.3 mit Hilfe von Relaxationsrechnungen bestätigt.

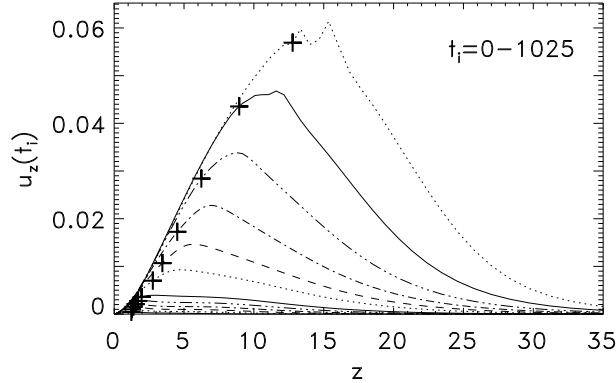


Abbildung 21: Geschwindigkeiten entlang der z -Achse zu verschiedenen Zeitpunkten der Simulation mit $y_0 = 1$, $v_0 = 10^{-3}$ und $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$. Die Kreuze kennzeichnen die jeweilige Apexhöhe der zentralen Flußröhre.

nehmen jedoch über mehrere $10^2 \tau_a$ kontinuierlich zu und können deshalb nicht als Anzeichen einer idealen MHD-Stabilität hochgradig verdrillter Flußröhren angesehen werden.

Der äußere Fluß entwickelt sich in der Simulation mit $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$ (Abb. 21) ähnlich wie in der Referenzsimulation (Abb. 14), weist jedoch eine deutlich geringere Expansion auf. Dieser Unterschied ist eindeutig auf die Trägheit des Plasmas zurückzuführen, da er erst in der dynamischen Phase auftritt.

Der Vergleich der Simulationen mit $y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$ und $v_0 = 10^{-2}$ bzw. $v_0 = 10^{-3}$ (Abbn. 13 a,d bzw. 20; siehe auch Abb. 26 weiter unten) zeigt, daß die allgemeine Entwicklung der zentralen Flußröhre qualitativ und die quasi-statische Phase sowie der Punkt des Übergangs zu dynamischem Verhalten auch quantitativ sehr ähnlich sind, wenn man die vergangene Zeit in akkumulierte Verdrillung transformiert (äquivalent zu einem Skalenfaktor von ca. 10 zwischen den Zeitachsen). In der dynamischen Phase erreicht das langsamer angetriebene System deutlich größere Apexhöhen als das schneller angetriebene, da ihm mehr Zeit zur Verfügung steht, sich in Reaktion auf die photosphärische Störung zu entwickeln. Dies untermauert die von Amari et al. [27] und hier in Abschn. 3.3.1 gezogene Schlußfolgerung, daß eine verdrillte magnetische Flußröhre ausbricht, sobald die Verdrillung einen kritischen Wert übersteigt.

3.3.3 Relaxation

Relaxationsrechnungen werden aus zwei Gründen durchgeführt. Zum einen soll belegt werden, daß sich die zentralen Flußröhre in der quasi-statischen Phase stets nahe an einem kraftfreien Gleichgewichtszustand befindet. Zum anderen soll die Hypothese, daß eine kritische Verdrillung existiert, nach deren Überschreitung die Flußröhre keinen neuen Gleichgewichtszustand innerhalb der Simulationsbox finden kann, untermauert werden. Hierzu werden für die Parametersätze $y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$, $v_0 = 10^{-3}$ und $y_0 = 1$, $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$, $v_0 = 10^{-2}$ zu verschiedenen Zeitpunkten der Entwicklung des kontinuierlich verdrillten

Systems zunächst die Wirbelgeschwindigkeiten innerhalb von 1-5 Alfvénzeiten auf Null gesenkt und anschließend die weitere Entwicklung des Systems bei ausgeschalteten Wirbeln verfolgt. Das System wird als in einen kraftfreien Zustand relaxiert angesehen, wenn sämtliche der folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Die Apexgeschwindigkeit der Flußröhre nimmt während der Relaxation über mindestens $120 \tau_a$ kontinuierlich ab und erreicht Werte von unter 3×10^{-5} .
- Die über die gesamte Simulationsbox integrierte Lorentzkraftdichte („Gesamtlorentzkraft“) nimmt im selben Zeitraum ebenfalls kontinuierlich ab.
- Es gilt $\alpha \approx \text{const}$ entlang der zentralen Feldlinie.

Die in den Relaxationsrechnungen verwendeten Parameter sind in Tabelle 2 zusammengefaßt.

Die Abb.22 und 23 illustrieren die Ergebnisse der in der quasi-statischen Phase gestarteten Relaxationsrechnungen. Aus den in Abb.22 aufgetragenen Apexhöhen geht

y_0	ρ_0	v_0	$1 - \sigma$	Φ_g	t_{relax}
1.0	B_0^2	0.001	0.0004	2.06 π	120
			0.0004	2.30 π	120
			0.001	2.53 π	280
			0.002	2.75 π	753
			0.005	2.95 π	1095
1.0	$ \mathbf{B}_0 $	0.01	0.0001	0.39 π	120
			0.0001	0.86 π	200
			0.0001	1.33 π	200
			0.0001	2.28 π	600
			0.0005	2.50 π	
			0.0001	2.65 π	1120
			0.0001	2.91 π	1358

Tabelle 2: Parameter der Relaxationsrechnungen. Die Viskosität und die künstliche Diffusion sind in allen Rechnungen konstant. Es ist stets $\nu = 0.1$ und $\sigma = \sigma_\rho = \sigma_u$ wie angegeben. t_{relax} bezeichnet die Dauer der einzelnen Rechnungen. Die Absenkung der Wirbelgeschwindigkeiten erfolgt innerhalb von $t_{r2} = 1$ für die Rechnungen mit $\rho_0 = B_0^2$ und innerhalb von $t_{r2} = 5$ für die Rechnungen mit $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$. Für die Rechnung bei $\Phi_g = 2.50 \pi$ ist t_{relax} nicht angegeben, da in dieser eine künstliche Verringerung der Plasmadichte durchgeführt wurde (Details siehe Text). In dieser Rechnung ist $t_{r2} = 1$.

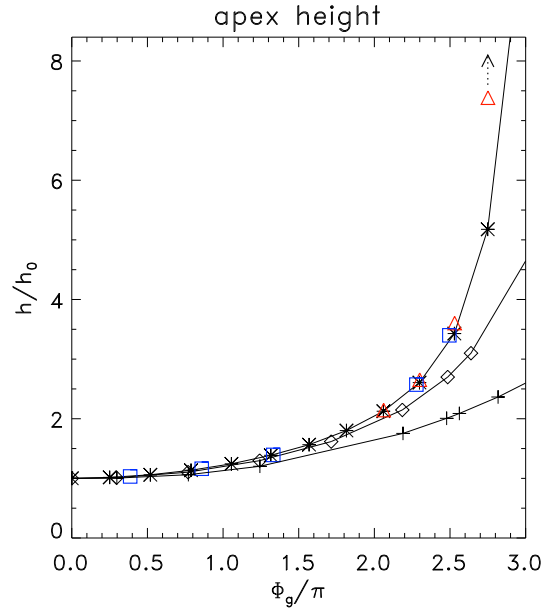


Abbildung 22: Apexhöhen der kontinuierlich verdrillten bzw. relaxierten Flußröhre als Funktion der globalen Verdrillung während der quasi-statischen Phase für Simulationen mit $y_0 = 1$. *Kreuze*: kontinuierlich verdrillt, $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$, $v_0 = 10^{-2}$; *Rautensymbole*: kontinuierlich verdrillt, $\rho_0 = B_0^2$, $v_0 = 10^{-2}$; *Sternchen*: kontinuierlich verdrillt, $\rho_0 = B_0^2$, $v_0 = 10^{-3}$; *Quadrate*: relaxierte Zustände, erhalten aus der Simulation mit $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$, $v_0 = 10^{-2}$; *Dreiecke*: relaxierte Zustände, erhalten aus der Simulation mit $\rho_0 = B_0^2$, $v_0 = 10^{-3}$. Die relaxierten Zustände sind farbig hervorgehoben. Das oberste Dreieck ($\Phi_g = 2.75\pi$) kennzeichnet einen nicht relaxierten Zustand (siehe Text).

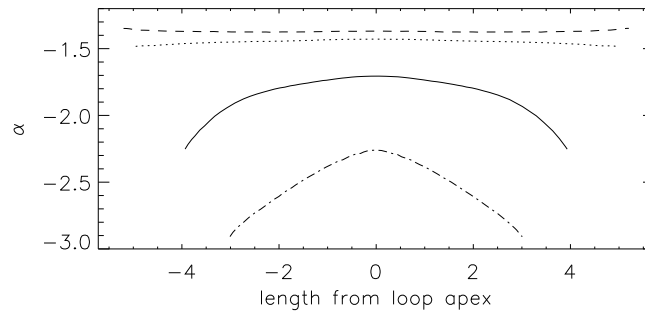


Abbildung 23: Verlauf des „Force-Free Parameters“ α entlang der zentralen Feldlinie in Simulationen mit $y_0 = 1$ bei einer globalen Verdrillung von $\Phi_g \approx 2.5\pi$. *Gepunktet-gestrichelte Linie*: kontinuierlich verdrillt, $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$, $v_0 = 10^{-2}$; *durchgezogene Linie*: kontinuierlich verdrillt, $\rho_0 = B_0^2$, $v_0 = 10^{-2}$; *gepunktete Linie*: kontinuierlich verdrillt, $\rho_0 = B_0^2$, $v_0 = 10^{-3}$; *gestrichelte Linie*: nach erfolgter Relaxation, $\rho_0 = B_0^2$, $v_0 = 10^{-3}$.

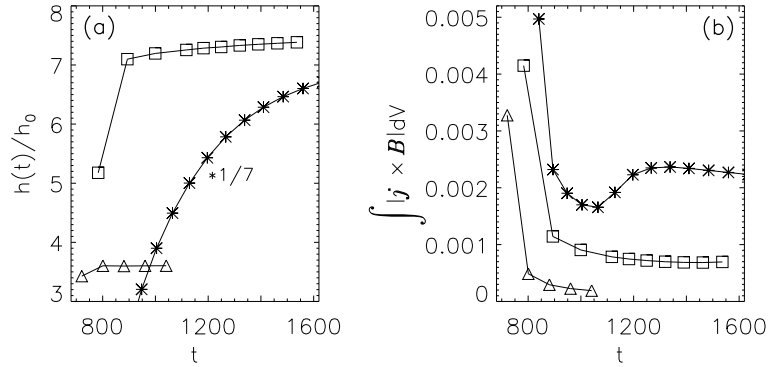


Abbildung 24: Relaxationsrechnungen, die vom System mit $y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$ und $v_0 = 10^{-3}$ bei den globalen Verdrillungen $\Phi_g = 2.53\pi$ (*Dreiecke*), 2.75π (*Quadrate*) und 2.95π (*Sternchen*) gestartet wurden. *a*): Apexhöhe der zentralen Flußröhre. *b*): Integrierte Lorentzkraftdichte in der gesamten Box. Die Apexhöhen wurden für den Fall $\Phi_g = 2.95\pi$ skaliert, um in die Abbildung zu passen.

hervor, daß sich die zentrale Flußröhre während der quasi-statischen Phase in den Simulationen mit $\rho_0 = B_0^2$ und $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$ in der Tat nahe einer Folge kraftfreier Gleichgewichte entwickelt. Die Abweichungen vom Gleichgewicht sind dabei umso geringer, je leichter sich der magnetische Fluß in Reaktion auf die photosphärischen Wirbel entwickeln kann, d. h. je geringer die Plasmadichte in den oberen Bereichen der Simulationsbox ist und je kleiner die Wirbelgeschwindigkeiten gewählt werden. Die in den Relaxationsrechnungen erreichten Apexhöhen sind für die beiden betrachteten Parametersätze nahezu ununterscheidbar. Dies bestätigt die in Abschn. 3.2.1 ausgesprochene Vermutung, daß kraftfreie Gleichgewichtszustände von der Verteilung der Plasmadichte und von den Wirbelgeschwindigkeiten unabhängig sind.

Eine weitere Diagnose der Abweichung von der Kraftfreiheit ist mit Hilfe des Parameters α (Gl. (2.27)) möglich, da dieser im kraftfreien Gleichgewichten entlang jeder magnetischen Feldlinie konstant ist (siehe Abschn. 2.1). In Abb. 23 ist α entlang der zentralen Feldlinie für die drei in Abb. 22 gezeigten Simulationen sowie für einen relaxierten Zustand, jeweils bei einer globalen Verdrillung von $\Phi_g \approx 2.5\pi$, aufgetragen. In den Simulationen mit $v_0 = 10^{-2}$ ist eine auf die Wirbelbewegungen an den Fußpunkten zurückzuführende leichte Abweichung vom kraftfreien Zustand zu erkennen, während die Simulation mit $v_0 = 10^{-3}$ und der relaxierte Zustand entlang der zentralen Feldlinie nahezu kraftfrei sind.

Die Abb. 24–27 illustrieren Versuche, das System ausgehend von Zuständen, die bereits die dynamische Phase erreicht haben, zu relaxieren. Abb. 24 zeigt die Entwicklung der Apexhöhe und der Gesamtlorentzkraft für drei repräsentative Rechnungen, die vom kontinuierlich verdrillten System mit $y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$ und $v_0 = 10^{-3}$ gestartet wurden, da sich dieses während der quasi-statischen Phase am wenigsten vom Gleichgewicht entfernt. Die Startkonfigurationen besitzen die globalen Verdrillungen $\Phi_g = 2.53\pi$, 2.75π und 2.95π .

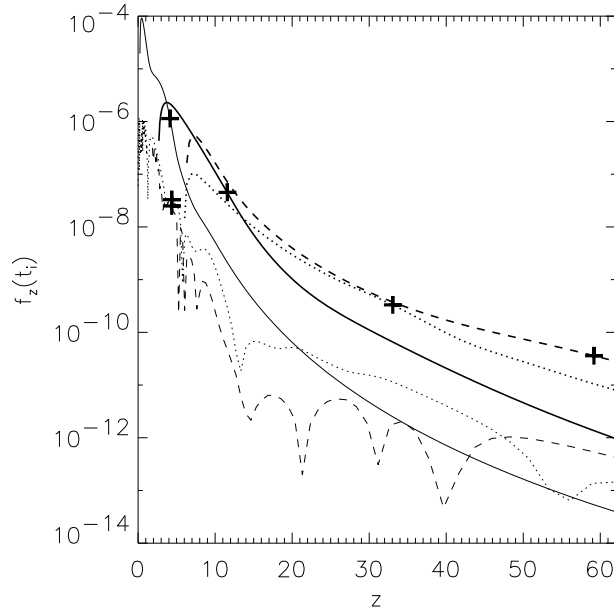


Abbildung 25: Lorentzkraftdichten entlang der z -Achse in Relaxationsrechnungen mit $y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$ und $v_0 = 10^{-3}$. *Dünne Linien*: $\Phi_g = 2.53\pi$ ($t = 721, 801, 1041$); *dicke Linien*: $\Phi_g = 2.95\pi$ ($t = 841, 1004, 1935$). Durchgezogene Linien zeigen das System zu Beginn der Relaxationsrechnung, gestrichelte Linien während eines zwischenzeitlichen Zustandes und gepunktete Linien am Ende der Relaxationsrechnung. Für $\Phi_g = 2.53\pi$ ist zu den Zeitpunkten $t \geq 801$ $|f_z(z)|$ aufgetragen, da die Lorentzkraftdichte in dieser Rechnung entlang der z -Achse mehrmals das Vorzeichen wechselt. Die Kreuze markieren die jeweilige Position der zentralen Flußröhre.

Bei $\Phi_g = 2.53\pi$ relaxiert die zentrale Flußröhre innerhalb kurzer Zeit in einen Gleichgewichtszustand. Bei $\Phi_g = 2.95\pi$ hingegen läßt sich das System nicht relaxieren. Die Apexhöhe der Flußröhre nimmt trotz der abgestellten Wirbelbewegungen über mehr als $10^3 \tau_a$ kontinuierlich zu, die Gesamtlorentzkraft nimmt während desselben Zeitraumes nicht spürbar ab (die anfängliche starke Abnahme ist lediglich auf die Relaxation der Fußpunktregionen, die die höchsten Lorentzkraftdichten enthalten, aufgrund des Ausschaltens der Wirbelbewegungen zurückzuführen). Aus Abb. 25 ist ersichtlich, daß die Lorentzkraftdichten auf der z -Achse während der Relaxationsrechnung sogar zunehmen, und zwar vorrangig an der jeweiligen Position der zentralen Flußröhre. Daraus läßt sich schließen, daß die allmähliche Abnahme der Apexgeschwindigkeit (Abb. 24 a) durch die langsame kontinuierliche Zunahme der Plasmadichte, die während der lang andauernden Integration durch die künstliche Diffusion erzeugt wird, verursacht wird. Die Relaxationsrechnung wurde abgebrochen, nachdem die zentrale Flußröhre das fünfzigfache ihrer Anfangshöhe erreicht hatte. Der Relaxationsversuch bei $\Phi_g = 2.75\pi$ kann ebenfalls nicht als erfolgreich betrachtet werden. Bei Verwendung der in Tabelle 2 aufgeführten Parameter der numerischen Diffusion steigt die Flußröhre langsam, aber kontinuierlich auf, während die

Gesamtlorentzkraft bei einem Wert sättigt, der dreimal so hoch ist wie der in der Relaxation bei $\Phi_g = 2.53\pi$ erreichte. Die Lorentzkraftdichten auf der z -Achse nehmen zunächst ab, dann jedoch wieder zu, erneut vorrangig an der jeweiligen Position der zentralen Flußröhre. Um die Relaxation zu beschleunigen und damit der durch die künstliche Diffusion hervorgerufenen Dichtezunahme entgegenzuwirken, wurde die Rechnung mit einer künstlichen graduellen Absenkung der Plasmadichte (insgesamt um einen Faktor 50) wiederholt.¹² In dieser Rechnung erreicht die Flußröhre zum Zeitpunkt $t = 1350$ eine Höhe von $h/h_0 = 17$, die deutlich über der in den Abb. 22 und 24 gezeigten Höhe liegt. Im Gegensatz dazu verbleibt die relaxierte Flußröhre bei $\Phi_g = 2.53\pi$ bei einer vergleichbaren Dichteverringerng auf ihrer Gleichgewichtshöhe.

Relaxationsversuche am System mit $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$ und $v_0 = 10^{-2}$ führen für Verdrillungen $\Phi_g = 2.65\pi$ und $\Phi_g = 2.91\pi$ auf analoge Resultate. In beiden Fällen läßt sich kein Gleichgewichtszustand der Flußröhre finden.

In Abb. 26 sind für die Referenzsimulation und die ansonsten analoge Simulation mit $v_0 = 10^{-3}$ die Apexhöhen der zentralen Flußröhre zusammen mit den bei Beendigung der Relaxationsrechnungen erreichten Höhen (die für $\Phi_g \geq 2.75\pi$ lediglich untere Grenzen darstellen) als Funktion der globalen Verdrillung aufgetragen. Aus der deutlich sichtbaren Änderung des Verhaltens oberhalb von 2.5π kann geschlossen werden, daß das untersuchte System eine kritische Verdrillung Φ_c aufweist, bei deren Überschreitung entweder

- kein stabiles Gleichgewicht mehr existiert oder
- eine Folge benachbarter Gleichgewichte existiert, die eine enorme Zunahme der Apexhöhe bei geringer zusätzlicher Verdrillung aufweisen.

Die kritische Verdrillung der betrachteten Konfiguration liegt im Bereich

$$2.5\pi < \Phi_c < 2.75\pi .$$

Mittels der beschriebenen Simulationen läßt sich aufgrund der endlichen Boxgrößen keine Entscheidung darüber herbeiführen, welche der beiden obigen Möglichkeiten zutrifft. Hier ist ein Vergleich mit analytisch erhaltenen Resultaten hilfreich.

Sturrock et al. [70] untersuchten das asymptotische Verhalten verscherter axialsymmetrischer kraftfreier Magnetfelder, wobei sie die Verscherung auf einer Kugeloberfläche ausführten. Eine derartige Verscherung beinhaltet aufgrund der auftretenden differentiellen Rotation eine Verdrillung der Feldlinien, so daß ein Vergleich mit den hier erhaltenen Resultaten sinnvoll ist. Sturrock et al. [70] fanden, daß der magnetische Fluß für Winkel größer als eins außerordentlich schnell, und zwar exponentiell mit dem Quadrat des Winkels der Fußpunktverschiebung, aufsteigt. Daraus läßt sich aber auch schließen, daß für jeden endlichen Scherwinkel eine Gleichgewichtskonfiguration mit geschlossenem magnetischen Fluß existiert, d. h., daß eine Öffnung der Konfiguration erst bei unendlich hohem

¹²Eine Verringerung der numerischen Diffusion war aufgrund frühzeitig auftretender numerischer Instabilität nicht möglich. Die stattdessen durchgeführte Verringerung der Plasmadichte ist erlaubt, da kraftfreie Gleichgewichtszustände von der Dichteverteilung unabhängig sind.

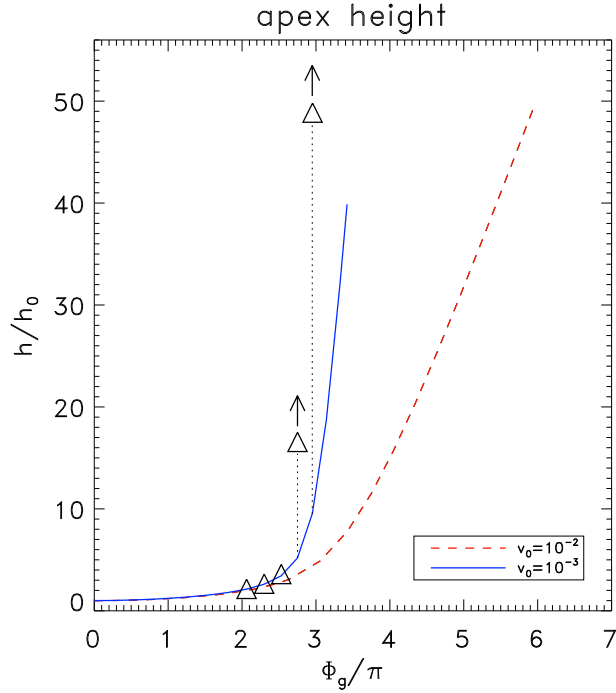


Abbildung 26: Apexhöhe der zentralen Flußröhre als Funktion der globalen Verdrillung in den Simulationen mit $y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$ und $v_0 = 10^{-2}$ (*rot*) bzw. $v_0 = 10^{-3}$ (*blau*). Die in den von der Simulation mit $v_0 = 10^{-3}$ ausgehenden Relaxationsrechnungen erreichten Apexhöhen sind durch Dreiecke markiert. Die obersten beiden Dreiecke kennzeichnen Zustände, in denen die Flußröhre nicht relaxiert werden kann, jeweils am Abbruch der Relaxationsversuche.

Scherwinkel oder bei Überschreitung des Schwellwertes einer Instabilität (falls eine solche existiert) auftritt. Der in Sturrock et al. [70] angegebene Ausdruck stimmt sehr gut mit den Simulationsergebnissen überein (Abb. 27) – allerdings nur für Verdrillungen unterhalb der kritischen Verdrillung. Die deutlich sichtbare Abweichung oberhalb der kritischen Verdrillung deutet darauf hin, daß in bogenförmigen Flußröhrenkonfigurationen Gleichgewichte mit $\Phi_g > \Phi_c$ instabil sind und somit bei $\Phi_g = \Phi_c$ eine Instabilität verbunden mit einer dynamischen „Öffnung“ des Magnetfeldes auftritt.

Die kritische Verdrillung des untersuchten Systems liegt nur geringfügig über der kritischen Verdrillung $\Phi_{GH} \approx 2.49\pi$ des Gold-Hoyle-Gleichgewichts (siehe Absch. 2.3), was aus folgenden Gründen sinnvoll erscheint.

- Der innere Bereich der zentralen Flußröhre wird durch die aufgeprägten Wirbel nahezu gleichmäßig verdrillt (Abb. 18 links) und ähnelt daher bis auf die relativ schwache Krümmung ($r_{\text{curvature}}/r_{\text{apex}}(r_{\text{foot}}=0.03, \Phi_g=2.53\pi) \approx 5$) dem Gold-Hoyle-Gleichgewicht.
- Es ist davon auszugehen, daß sowohl der nur schwach verdrillte und ebenfalls ex-

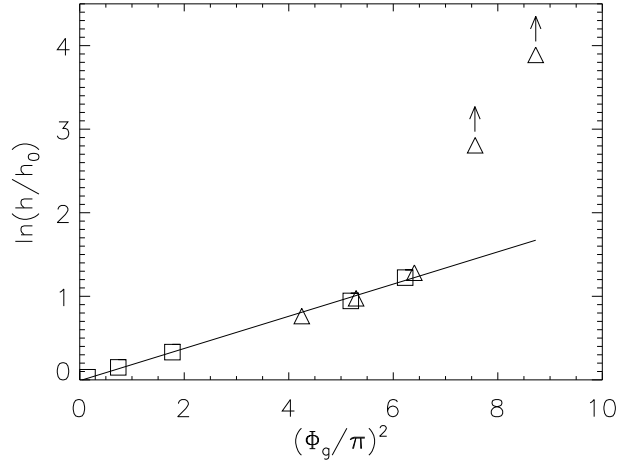


Abbildung 27: Vergleich der in den Relaxationsrechnungen erreichten Apexhöhen der zentralen Flußröhre mit der Aufstiegscharakteristik $h \propto \exp(\text{const} \cdot \Phi_g^2)$ axialsymmetrischer Konfigurationen nach Sturrock et al. [70]. Die Symbole sind wie in den Abb. 22 und 26 gewählt. Die den ersten acht Datenpunkten angepasste Gerade stimmt exzellent mit der Aufstiegscharakteristik nach Sturrock et al. [70] überein.

pandierende äußere Fluß als auch der unverdrillte Fluß, der sich nicht über sondern nur neben der Flußröhre schließt, keinen signifikanten Beitrag zur Stabilisierung der zentralen Flußröhre leisten (siehe Abschn. 3.2.1).

Dies legt die Vermutung nahe, daß im untersuchten Systems eine Kink-Instabilität der verdrillten zentralen Flußröhre auftritt. In diesem Fall ist zu erwarten, daß (anfänglich kleine) helische Verformungen der Flußröhre mit der Zeit deutlich anwachsen. Dies ist jedoch schwierig zu diagnostizieren, da die Flußröhre aufgrund der Wirbelbewegungen bereits in der quasi-statischen Phase eine helische Form annimmt. Es lassen sich jedoch Hinweise auf die Kink-Instabilität finden: aus Abb. 28 ist ersichtlich, daß die Rotation des oberen Teils der Flußröhre um die z -Achse (die ein Maß für die helische Verformung darstellt) während der dynamischen Phase trotz konstanter Wirbelgeschwindigkeit beschleunigt wird und daß sie während der Relaxationsrechnung trotz abgeschalteter Wirbel weiter zunimmt. Des weiteren ist zu erkennen, daß der Winkel zwischen \mathbf{j} und \mathbf{B} und somit die Abweichung vom kraftfreien Zustand im oberen Teil der Röhre während der dynamischen Phase (Abb. 17) und während der gesamten Relaxationsrechnung (Abb. 28) anwächst. Die beim Auftreten der Kink-Instabilität zu erwartende spürbare Abnahme der magnetischen Energie konnte jedoch nicht in dem zunächst erwarteten Ausmaß beobachtet werden. Es wurde während der bei $\Phi_g = 2.95\pi$ gestarteten Relaxationsrechnung eine Abnahme von ~ 0.1 Prozent gefunden. Dieser verhältnismäßig geringe Betrag ist auf die nur geringfügig überkritische Verdrillung und auf die Tatsache, daß der Hauptteil der magnetischen Energie in den Fußpunkten der Flußröhre konzentriert ist, zurückzuführen. In diesen findet nach dem Abschalten der Wirbelbewegungen keine nennenswerte Umkonfigurierung des

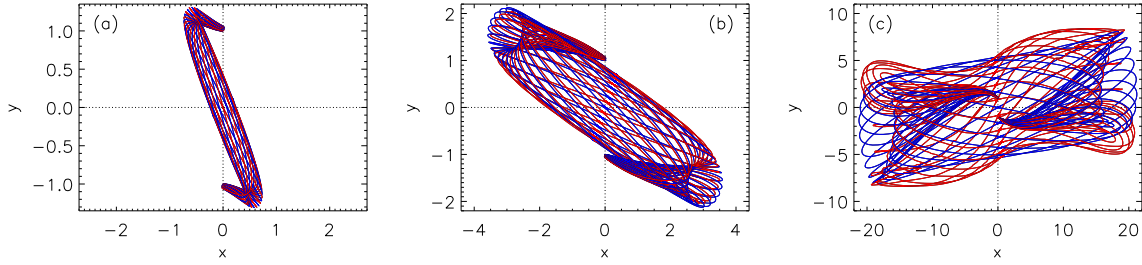


Abbildung 28: Projektionen der Feldlinien des Magnetfeldes (*blau*) und der Stromdichte (*rot*) der zentralen Flußröhre auf die Grundfläche für den Fall $y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$ und $v_0 = 10^{-3}$. *a*): Verdrillungsphase, $\Phi_g = 2.53\pi$ ($t = 721$). *b*): Verdrillungsphase, $\Phi_g = 2.95\pi$ ($t = 841$; Beginn der Relaxationsrechnung). *c*): Relaxationsphase, $\Phi_g = 2.95\pi$ ($t = 1785$; Beendigung der Relaxationsrechnung).

Magnetfeldes statt.

3.4 Vergleich mit Beobachtungen

3.4.1 Eruption der Flußröhre

Die in Abschn. 3.3.3 gefundenen Ergebnisse deuten sehr deutlich darauf hin, daß der sehr schnelle Aufstieg der zentralen Flußröhre für $\Phi_g > \Phi_c$ auf eine Instabilität zurückzuführen ist. Die weitere Möglichkeit eines Aufstiegs in einer Folge kraftfreier Gleichgewichte, der für große Φ_g noch viel schneller als in Sturrock et al. [70] verläuft, kann mit den gegebenen numerischen Mitteln nicht zwingend ausgeschlossen werden. Für den Vergleich der Simulationsergebnisse mit der Beobachtung ist die Unterscheidung zwischen diesen beiden Möglichkeiten jedoch nicht entscheidend. Die in der bei $\Phi_g = 2.95\pi$ gestarteten Relaxationsrechnung erreichte Apexhöhe impliziert einen Höhengewinn der zentralen Flußröhre um mindestens einen Faktor 50. Skaliert man den in der Simulation verwendeten Dipolabstand auf den typischen Abstand zwischen der führenden und der nachfolgenden magnetischen Polarität in einer aktiven Region, $\sim 70\,000$ km, so entspricht die Apexhöhe von $50 h_0$ in etwa $3 R_\odot$. In dieser Höhe würden sukzessive ansteigende Gleichgewichtszustände durch den Sonnenwind beschleunigt werden. Beide Möglichkeiten würden also als Eruption beobachtet werden.

3.4.2 Magnetflußexpansion und Dreifachstruktur von CMEs

Aus Abb. 14 ist zu entnehmen, daß der expandierende äußere Fluß nicht durch die zentrale Flußröhre angeschoben wird. Vielmehr entfernt er sich im Laufe der Simulation von dieser, wobei seine Expansion auf die eigene Fußpunktverdrillung zurückzuführen ist. Die Expansion des äußeren Flusses ist bereits in der quasi-statischen Phase bemerkbar, findet jedoch hauptsächlich in der dynamischen Phase statt, vorausgesetzt, daß die Plasmadichte mit der Höhe über der Photosphäre schnell genug abfällt, wie es in der Referenzsimulation

der Fall ist (vergl. die Abb. 14 und 21 für die Fälle $\rho_0 = B_0^2$ und $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|$). Für die zentrale Flußröhre ist hingegen aufgrund der nahezu gleichmäßigen Fußpunktverdrillung eine Einschnürung des magnetischen Flusses („Pincheffekt“) zu erwarten. Die Simulation zeigt jedoch, daß auch die zentrale Flußröhre expandiert, wenn auch nicht so stark wie der äußere Fluß.

Um diesem auf den ersten Blick widersprüchlichen Verhalten auf den Grund zu gehen, ist es hilfreich, die Radialkomponente der Lorentzkraftdichte $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ einer geraden zylindersymmetrischen Flußröhre $\mathbf{B} = (0, B_\varphi(r), B_z(r))$ als Näherung der bogenförmigen zentralen Flußröhre zu betrachten (vergl. mit Gl. (2.31)):

$$f_r = - \left(\frac{1}{r} B_\varphi^2 + \frac{1}{2} \partial_r B^2 \right). \quad (3.50)$$

Der erste Term auf der rechten Seite zeigt stets nach innen (Einschnürung), der zweite Term kann jedoch sowohl nach innen als auch nach außen (Expansion) weisen. Fällt B^2 mit dem Abstand von der Flußröhrenachse hinreichend schnell ab, so führt der zweite Term zur Expansion der Flußröhre. Dies ist in der zentralen Flußröhre der Referenzsimulation sowohl in der Grundfläche als auch in der Querschnittsfläche am Apex, und somit aller Wahrscheinlichkeit nach auch entlang der gesamten Röhre der Fall. Für weniger stark abfallende Funktionen $B^2(r)$ überwiegt die Einschnürung des magnetischen Flusses in Richtung der Flußröhrenachse (siehe z. B. [46]). Ist die Verdrillung jedoch räumlich begrenzt ($B_\varphi = 0$ für $r > R$), so führt der zweite Term *stets* zur Expansion des Flusses in großer Entfernung von der Achse, da $B^2(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. In einem idealen Plasma muß sich dann zwangsläufig ein Gebiet reduzierter Dichte um den zentralen verdrillten Fluß ausbilden. An der Grenze zu dem außerhalb der photosphärischen Wirbel verankerten und somit ungestörten Fluß muß es dann zu einem Aufschieben des magnetischen Flusses und des Plasmas kommen (selbst wenn die Plasmadichte während der gesamten Simulation nach außen hin monoton abfällt, wie es in der Referenzsimulation aufgrund des anfänglichen starken Dichteabfalls der Fall ist).

Die resultierende Konfiguration weist Ähnlichkeit mit der in vielen CMEs beobachteten Dreifachstruktur, bestehend aus einer stark verdrillten Protuberanz im Kerngebiet, einem diese umgebenden Bereich geringerer Dichte und einer diffusen äußeren Struktur wiederum erhöhter Dichte (Abb. 1 oben rechts; siehe z.B. auch [31]), auf. Um die Übereinstimmung des beschriebenen Effekts mit CME-Beobachtungen auch quantitativ zu überprüfen, sind der Gradient des Plasmadruckes sowie Magnetfeldkonfigurationen und Wirbelprofile, die zu einer Einschnürung des zentralen magnetischen Flusses führen, in zukünftigen Simulationen aufzunehmen.

3.4.3 Ausbildung sigmoidaler Flußröhren

Die Ausrichtung (S- oder inverses S) beobachteter Sigmoide ist mit der Händigkeit der Verdrillung des Magnetfeldes und somit mit dem Force-Free-Parameter α (siehe Abschn. 1.1 und 2.2) verknüpft. Pevtsov et al. [71] untersuchten Sigmoide in aktiven Regionen, de-

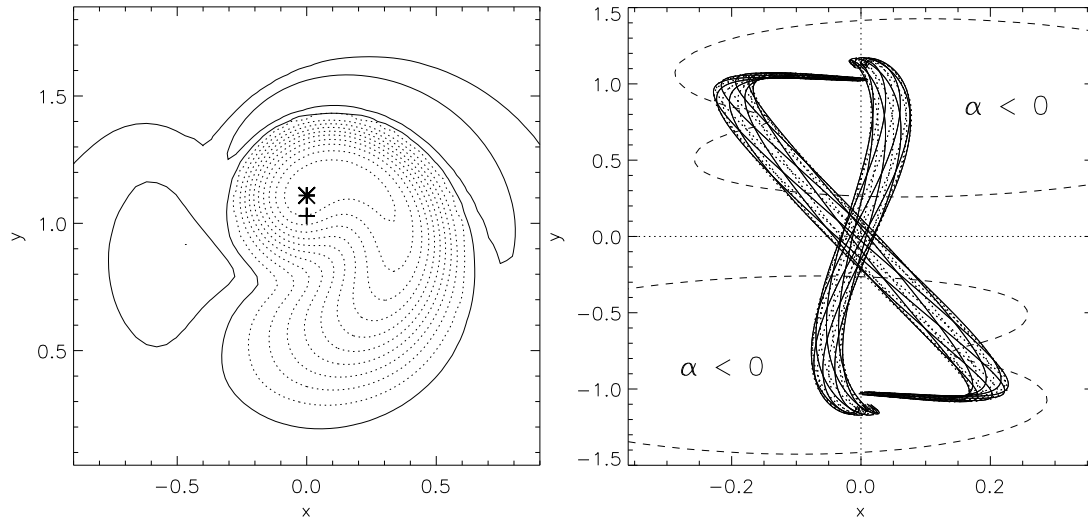


Abbildung 29: *Links*: Äquidistante Konturlinien von $|\mathbf{j}(z = 0)|$ für die Simulation mit $y_0 = 1$, $\rho_0 = B_0^2$ und $v_0 = 10^{-3}$ nach erfolgter Relaxation bei einer globalen Verdrillung von $\Phi_g = 2.06\pi$. Konturlinien mit $\alpha > 0$ ($j_z > 0$) sind durchgezogen dargestellt, solche mit $\alpha < 0$ ($j_z < 0$) gepunktet. (Die Konturlinien von α sind in der Grundfläche ähnlich zu den Konturlinien von $|\mathbf{j}|$, siehe Abb. 3 in [76]). Im gesamten gezeigten Gebiet gilt $B_z > 0$. Das Wirbelzentrum ist durch ein Kreuz gekennzeichnet, die Position der maximalen Stromdichte durch ein Sternchen. *Rechts*: Projektion zweier Flußröhren, die dem Wirbelzentrum bzw. dem Gebiet der maximalen Stromdichte entspringen. Die Apexhöhen sind 2.6 bzw. 2.2. Dargestellt sind magnetische Feldlinien (durchgezogen) und Feldlinien der Stromdichte (gepunktet) sowie Konturlinien von $\alpha = 0$ (gestrichelt).

ren photosphärische Magnetogramme ein überwiegend einheitliches Vorzeichen von α aufwiesen. Sie fanden, daß in aktiven Regionen mit positivem (negativem) α bzw. rechts (links-)händiger Verdrillung über neunzig Prozent der Sigmoiden eine S (inverse S-)Form zeigten.¹³

Die Projektion der zentralen Flußröhre auf die Grundfläche der Simulationsbox weist während des größten Teiles der Entwicklung des Systems eine S-Form auf (siehe Abschn. 3.3.1 und Abb. 28). Innerhalb der zentralen Flußröhre ist jedoch α aufgrund des entgegen des Uhrzeigersinns gerichteten Umlaufsinn der Wirbel (siehe Abb. 11) und der sich daraus ergebenden Linkshändigkeit der Verdrillung während der gesamten Simulation negativ (Abb. 29). Somit ist die helische Verformung der zentralen Flußröhre entgegengesetzt zu der typischerweise in Sigmoiden beobachteten.

Titov & Démoulin [74] schlugen vor, daß Sigmoiden sich von ihrer Umgebung durch eine höhere Stromdichte unterscheiden und dadurch stärker geheizt und somit im weichen Röntgenlicht sichtbar werden. Im hier untersuchten System tritt die höchste Stromdichte

¹³Diese Beobachtung ist in Übereinstimmung mit der hemisphärischen Präferenzregel, da α in der südlichen Hemisphäre überwiegend positiv und in der nördlichen überwiegend negativ ist [72, 73].

in einer sehr geringen Entfernung vom Wirbelzentrum auf (Abb. 29 links). Dennoch zeigen die in der Umgebung der maximalen Stromdichte verankerten Feldlinien im Gegensatz zur zentralen Flußröhre eine inverse S-Form (sowohl vor als auch nach der Relaxation), die in Übereinstimmung mit der typischen Ausrichtung von Sigmoiden in Regionen mit $\alpha < 0$ steht (Abb. 29 rechts). Die im Bereich der maximalen Stromdichte verankerte Flußröhre steigt mit wachsender Verdrillung ebenfalls auf, ihre Apexhöhe ist dabei typischerweise um ca. 20 Prozent geringer als die Apexhöhe der zentralen Flußröhre. Der relativ geringe Unterschied der α -Werte an den Fußpunkten der beiden in Abb. 29 dargestellten Flußröhren zeigt, daß die von Pevtsov et al. [71] geäußerte Vermutung einer strengen Korrelation der Sigmoidform mit dem Vorzeichen von α noch nicht als gesichert angesehen werden kann.

Durch die hier durchgeführten Simulationen wird die von Titov & Démoulin [74] geäußerte Vermutung, daß Sigmoiden durch stromgetriebene Heizungsprozesse von den umgebenden koronalen Feldern unterschieden werden, unterstützt (siehe auch Magara & Longcope [75]).

Die in der Umgebung der maximalen Stromdichte verankerte Flußröhre behält auch nach der Relaxation in ein stabiles Gleichgewicht ihre inverse S-Form (Abb. 29) bei. Dies legt nahe, persistente Sigmoiden als verdrillte magnetische Flußröhren zu interpretieren (für die Interpretation transienter Sigmoiden siehe Abschn. 5.1).

3.5 Zusammenfassung und Bewertung

- Ausgehend von einem Potentialfeld läßt sich mit Hilfe photosphärischer Wirbel eine bogenförmige verdrillte magnetische Flußröhre erzeugen. Unter dem kontinuierlichen Einfluß langsamer, an den Fußpunkten der Flußröhre lokalisierter Wirbelbewegungen durchläuft diese im Rahmen der idealen MHD zunächst in sehr guter Näherung in einer quasi-statischen Entwicklung eine Folge von kraftfreien Gleichgewichtszuständen. Diese zeichnen sich durch ein langsames Aufsteigen der Flußröhre mit wachsender Verdrillung aus, die mit dem von Sturrock et al. [70] gefundenen Aufstiegsverhalten des magnetischen Flusses in axialsymmetrischen Konfigurationen übereinstimmt. Die erhaltenen Gleichgewichtszustände sind unabhängig von der anfänglichen Verteilung der Plasmadichte und von den aufgeprägten Wirbelgeschwindigkeiten. Sie enthalten einen entgegengesetzt gerichteten Strom in der Umgebung der Flußröhre.

Die magnetischen Feldlinien nehmen in dieser Phase der Entwicklung eine helische Struktur an, wobei sowohl Feldlinien mit einer S-Form als auch mit einer inversen S-Form ihrer Projektion auf die Grundfläche ausgebildet werden. Die Form der in der unmittelbaren Umgebung des Wirbelzentrums verankerten Feldlinien ist dabei entgegengesetzt zu der Form der in der Region maximaler Stromdichte verankerten Feldlinien. Die Region maximaler Stromdichte liegt innerhalb des Wirbelbereichs und sehr nahe am Wirbelzentrum. Die in ihr verankerten Feldlinien weisen eine inverse S-Form auf, die mit der typischen Ausrichtung der im weichen Röntgenlicht in aktiven Regionen beobachteten Sigmoiden übereinstimmt. Dies legt nahe, persistente Sigmoiden als stabile verdrillte magnetische Flußröhren zu interpretieren.

- Es existiert eine kritische Verdrillung Φ_c , nach deren Überschreitung die Flußröhre kein neues Gleichgewicht mehr innerhalb der Simulationsbox findet. Die Entwicklung der Flußröhre wird hochgradig dynamisch: das Plasma bildet Ausbreitungsgeschwindigkeiten aus, die die Größenordnung der Alfvéngeschwindigkeit erreichen. Dies bedeutet, daß in dieser Phase der Entwicklung entweder kein stabiles Gleichgewicht mehr existiert oder aber, daß stabile Gleichgewichte durch einen extrem starken Anstieg der Flußröhrenhöhe bei geringer über Φ_c hinausgehender Verdrillung charakterisiert sind. Die auf typische koronale Werte skalierten Simulationsparameter spiegeln in beiden Fällen eine Eruption wieder. Der Vergleich der Simulationsergebnisse mit dem in Sturrock et al. [70] beschriebenen Skalenverhalten der Flußröhrenexpansion legt nahe, daß für $\Phi > \Phi_c$ kein stabiles Gleichgewicht existiert. Dieses Ergebnis bestätigt die von Amari et al. [27] für ein unterschiedliches anfängliches Potentialfeld gezogene Schlußfolgerung, daß eine koronale magnetische Flußröhre bei hinreichender Verdrillung ausbricht, und legt einen Mechanismus für das Ausbrechen nahe.

Die quantitativen Eigenschaften des Systems hängen während dieser dynamischen Phase im Gegensatz zur quasi-statischen Phase stark von der Plasmadichte und den Wirbelgeschwindigkeiten ab.

- Sämtliche oben genannten Eigenschaften des Systems bleiben unverändert, wenn die Wirbel so nahe zueinander gebracht werden, daß zusätzlich zur Verdrillung auch eine Verscherung zwischen ihnen auftritt, zumindest solange die durch die Verscherung erzeugten Stromdichten kleiner bleiben als die durch die Verdrillung erzeugten.
- Die kritische Verdrillung liegt im untersuchten System (mit normiertem Dipolhalbabstand $y_0 = 1$) im Bereich $2.5\pi < \Phi_c < 2.75\pi$ und somit sehr nahe am Schwellwert der Kink-Instabilität in zylindersymmetrischen Flußröhren. Dies deutet zusammen mit dem beobachteten Anwachsen der helischen Verformung der Flußröhre während der bei überkritischer Verdrillung gestarteten Relaxationsrechnungen darauf hin, daß auch im hier untersuchten System, und somit in bogenförmigen Flußröhren, eine Kink-Instabilität auftritt.
- Der die Flußröhre umgebende und ebenfalls im Wirbelgebiet verankerte äußere magnetische Fluß erfährt mit zunehmender Verdrillung des Systems eine von der Flußröhrenachse weggerichtete Expansion. Es ist zu erwarten, daß, je nach Struktur des anfänglichen Magnetfeldes $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ und des Wirbelprofils $u_{x,y}(x, y, 0)$, der innere Teil der Flußröhre entweder eine Einschnürung oder eine Expansion erfährt. Die Expansion des äußeren Flusses ist in der Simulation nur dann wahrnehmbar, wenn die Plasmadichte hinreichend realistisch modelliert wird, so daß die Alfvéngeschwindigkeit nicht zu schnell mit der Höhe über der Photosphäre abfällt. In einem solchen Fall führt die Expansion zu einem Gebiet verringerter Dichte in der Umgebung der Flußröhre. In einem realistischeren als dem in dieser Arbeit studierten Modell ist dann zu erwarten, daß an der Grenze zu dem von den Wirbeln nicht beeinflussten Fluß der magnetische Fluß und das Plasma aufgeschoben werden. In

einem solchen Modell sollte sich die oftmals beobachtete Dreifachstruktur von CMEs simulieren lassen. Der Vergleich mit den Ergebnissen des Kapitels 4 zeigt, daß eine solche „Mit-Expansion“ des die Flußröhre umgebenden Flusses, die durch photosphärische Strömungen bewirkt werden kann, die Eruption wesentlich unterstützt und somit unter Umständen ein wesentliches oder gar notwendiges Element eines vollständigen Modells solarer Eruptionen darstellt.

- Die gefundene kritische Verdrillung übersteigt die Werte, die durch die höchsten je beobachteten Gesamtrotationen von Sonnenflecken erreicht wurden, deutlich [60]. Folglich muß angenommen werden, daß koronale magnetische Flußröhren entweder bei ihrem Auftauchen aus der Konvektionszone bereits beträchtlich verdrillt sind, wie in Einzelfällen von Lites et al. [61] und Leka et al. [62] gefunden, und daß die kritische Verdrillung durch eine Kombination aus Rotation und Vergrößerung der Flußröhrenlänge während des Auftauchens erreicht wird oder daß die Verdrillung durch andere Prozesse, wie zum Beispiel durch den in Abschn. 1.2.4 erläuterten Prozeß des „Tether Cutting“, aufgebaut wird.
- Die in den bei überkritischer Verdrillung gestarteten Relaxationsrechnungen beobachtete relativ geringfügige Abnahme der akkumulierten freien magnetischen Energie entspricht nur bedingt den Vorstellungen der „Storage and Release“-Modelle (siehe Abschn. 1.2). Nach diesen muß in solaren Eruptionen ein erheblicher Anteil der freien magnetischen Energie in Bewegungsenergie des Plasmas umgewandelt werden, damit das ausgeworfene Material die Anziehungskraft der Sonne überwinden kann (siehe z. B. [12]).

Aus den in den letzten beiden Punkten genannten Gründen sind die in diesem Kapitel beschriebenen Simulationen, die die Eruption einer verdrillten kraftfreien Flußröhre zeigen, noch nicht als ein befriedigendes Modell, sondern lediglich als ein Schritt auf dem Wege einer umfassenden Erklärung solarer Eruptionen anzusehen.

4 Kink-Instabilität koronaler magnetischer Flußröhren

4.1 Einführung

Dieses Kapitel beschreibt wie das vorhergehende numerische Simulationen der Stabilität und zeitlichen Entwicklung einer bogenförmigen magnetischen Flußröhre. Hier wird jedoch als Anfangskonfiguration der Simulationen ein von Titov & Démoulin [74] (TD) entwickeltes analytisches Modell (im folgenden als TD-Gleichgewicht bezeichnet) verwendet, das bereits in seiner Anfangskonfiguration eine verdrillte stromführende Flußröhre enthält. In Kapitel 3 wurde gezeigt, daß die numerische Konstruktion einer instabilen verdrillten Flußröhre durch photosphärische Wirbel Drehwinkel erfordert, die deutlich über den beobachteten Werten liegen. Im TD-Gleichgewicht sind Wirbelbewegungen zur Erzeugung der Verdrillung nicht mehr notwendig, da die Stärke der Verdrillung der Flußröhre weitgehend frei gewählt werden kann. Aus diesem Grunde werden sie hier nicht verwendet. Die Einbeziehung photosphärischer Wirbel in zukünftige Untersuchungen des Modells ist jedoch durchaus sinnvoll, um z. B. die Flußröhre von einem bereits verdrillten, aber stabilen Zustand in einen instabilen Zustand zu treiben und somit den Prozeß der Einspeisung („Storage“) freier magnetischer Energie zu simulieren. Hier wird zunächst durch Variation der anfänglichen Verdrillung der Flußröhre untersucht, ob auch im TD-Gleichgewicht bei hinreichender Verdrillung eine (Kink-)Instabilität auftritt und sich zu einer Eruption entwickelt. Wie die verdrillte Flußröhre zustande kommt, ist nicht Gegenstand der Untersuchung (alternativ zur ihrer Erzeugung durch photosphärische Strömungen kann die verdrillte Flußröhre z. B. durch magnetische Rekonnexion zustande kommen oder bereits verdrillt aus der Konvektionszone auftauchen, siehe Abschn. 3.1). Für die Untersuchung der Freisetzung („Release“) freier magnetischen Energie ist das TD-Gleichgewicht besser geeignet als das in Kapitel 3 betrachtete, da sich im TD-Gleichgewicht problemlos auch deutlich überkritische Konfigurationen untersuchen lassen.

Das von TD entwickelte Modell ist ein axialsymmetrisches, näherungsweise kraftfreies Gleichgewicht. Es wird durch die Superposition eines Ringstromes I , zweier fiktiver subphotosphärischer magnetischer Monopole $\pm q$ und eines fiktiven subphotosphärischen Linienstromes I_0 konstruiert (Abb. 30). Der toroidale Ringstrom besitzt einen Torusradius R und einen Röhrenradius a . Die Symmetrieachse des Torus befindet sich in einer Tiefe d unterhalb der photosphärischen Ebene $\{z = 0\}$. Die auf der Symmetrieachse in den Abständen $\pm L$ von der Torusebene befindlichen Monopole dienen der Kompensation der durch den Ringstrom erzeugten, nach außen gerichteten „Lorentz-Selbstkraft“ (engl. auch Hoop Force, siehe z. B. [77]) des Torus. Das nur aus dem Ringstrom und den Monopolen bestehende System enthält eine konzentrische magnetische X-Linie zwischen dem Ringstrom und dem Toruszentrum. Außerhalb des Torus ist das System stromfrei. Innerhalb des Torus wird unter der vereinfachenden Annahme von lokaler Zylindergeometrie die toroidale Feldkomponente so gewählt, daß Kraftfreiheit gemäß Gl. (2.31) gegeben ist (siehe Gl. (13) in TD). In dem so erhaltenen approximativen kraftfreien Gleichgewicht sind die Feldlinien an der Oberfläche der Flußröhre unendlich stark verdrillt. Zur Erzeugung einer

endlichen Verdrillung in der gesamten Konfiguration wird eine toroidale Feldkomponente mit Hilfe des Linienstromes I_0 zum System addiert, wobei die Stärke der Verdrillung durch den frei wählbaren Betrag des Linienstromes gesteuert werden kann. Durch die Hinzunahme des Linienstroms wird die magnetische X-Linie zu einer sogenannten „hyperbolischen Flußröhre“ (engl. Hyperbolic Flux Tube, HFT), die die Schnittlinie zweier sogenannter „Quasi-Separatrix-Flächen“ (engl. Quasi-Separatrix-Layers, QSL) darstellt (für Details zu HFTs und QSLs siehe [78]). Die Genauigkeit des approximativen kraftfreien Gleichgewichts nimmt mit abnehmenden a/L und a/R zu. Der oberhalb von $\{z = 0\}$ gelegene Teil der Konfiguration dient als Modell eines in ein Potentialfeld eingebetteten koronalen Plasmaloops. Das System besitzt sechs freie Parameter R , d , L , N_t , q und I_0 , wobei N_t die Anzahl der Windungen der Feldlinien um die Torusachse an der Oberfläche des Torus bezeichnet. Die Wahl dieser Größen legt den Ringstrom I und den Röhrenradius a fest (siehe TD). Die Anzahl der Windungen der Feldlinien an der Oberfläche der verdrillten Flußröhre (der oberhalb von $\{z = 0\}$ gelegene Torusabschnitt) ist durch $N_{\text{cor}} = (N_t/\pi)/\arccos(d/R)$ gegeben.

Das TD-Gleichgewicht stellt im Unterschied zu der in Kapitel 3 betrachteten rein bipolaren Konfiguration eine gemischt bipolar-quadrupolare Konfiguration dar (Abb. 31). Damit kommt es der realistischen Modellierung einer aktiven Region näher. In aktiven Regionen beobachtet man neben den (im allgemeinen zwei) magnetischen Hauptpolaritäten oftmals sogenannte „parasitäre Polaritäten“ [79]. Es korrespondiert des weiteren sehr gut mit der Beobachtung von Protuberanzen in aktiven Regionen (die sich stets entlang magnetischer Neutrallinien, wo die Normalkomponente des photosphärischen Magnetfeldes das Vorzeichen wechselt, ausbilden; siehe z. B. [80]), da die verdrillte Flußröhre im Modell die beiden parasitären Polaritäten verbindet.¹⁴ Die Instabilität und Eruption einer solchen Protuberanz ist ein zentraler Prozeß in fast allen großen solaren Eruptionen (siehe Abschn. 1.1).

Die Ergebnisse des Kapitels 3 weisen deutlich darauf hin, daß in bogenförmigen magnetischen Flußröhren bei ausreichender Verdrillung die Kink-Instabilität auftritt. Somit ist die Kink-Instabilität auch im TD-Gleichgewicht zu erwarten. Daneben kann in diesem System eine weitere ideale MHD-Instabilität auftreten, die sich in einer globalen Expansion der Flußröhre manifestiert. Diese wird im folgenden als „Torus-Instabilität“ bezeichnet. Sie wird ausgelöst durch eine Störung des Gleichgewichts zwischen der Lorentz-Selbstkraft der Röhre und der entgegengesetzt gerichteten Lorentzkraft, die durch die Wechselwirkung des Ringstroms mit dem Magnetfeld der beiden fiktiven Monopole hervorgerufen wird.

TD schätzten den Schwellwert der Torus-Instabilität analytisch ab, wobei sie wachsende Störungen $\delta R > 0$ betrachteten und die Fußpunktverankerung der Röhre in vereinfachender Weise in Betracht zogen. Sie fanden, daß die Instabilität für hinreichend große Torusradien, $R \gtrsim \sqrt{2} L$, auftritt. In einer numerischen Untersuchung des TD-Gleichgewichts fanden Rousev et al. [26], daß der Schwellwert der Instabilität deutlich höher liegt, nämlich

¹⁴Die Flußröhre des TD-Gleichgewichts kann als einfaches Modell einer Protuberanz angesehen werden, da sie zum einen verdrillt ist und zum anderen in den hier beschriebenen Simulationen eine um etwa eine Größenordnung höhere Plasmadichte als ihre Umgebung besitzt.

bei $R \approx 5L$. Ferner fanden sie, daß die langsame Abnahme des durch den Linienstrom I_0 erzeugten toroidalen Magnetfeldes mit der Höhe über der Photosphäre eine Eruption der Flußröhre verhindert.

Hier wird in Erweiterung dieser Arbeiten die Flußröhre bezüglich des Auftretens der Kink-Instabilität untersucht, da diese in zylindersymmetrischen kraftfreien Konfigurationen den niedrigsten Schwellwert aller stromgetriebenen MHD-Instabilitäten besitzt (siehe Abschn. 2.3). Es werden, basierend auf den Ergebnissen von Roussev et al. [26], R und L so gewählt, daß die Torus-Instabilität unterdrückt wird und die Kink-Instabilität isoliert untersucht werden kann. Eine zukünftige weiterführende Untersuchung der Torus-Instabilität ist im Hinblick auf die Erklärung solarer Eruptionen natürlich ebenfalls von großem Interesse (siehe Kapitel 6).

Das TD-Gleichgewicht ist für die Untersuchung der Kink-Instabilität bogenförmiger Flußröhren mit Fußpunktverankerung besser geeignet als das in Kapitel 3 betrachtete Modell, da zum einen die Instabilität der Flußröhre bei ruhendem Umgebungsfeld studiert werden kann und zum anderen keine Expansion der Röhre und somit kein Anwachsen der Länge und des Radius der Flußröhre vor dem Einsetzen der Instabilität stattfindet.

Zusammenfassend kann das in diesem Kapitel untersuchte System wie folgt charakterisiert werden (vergl. mit Abschn. 3.1):

- Die numerisch auf ihre Stabilität untersuchten analytischen approximativen kraftfreien Gleichgewichte enthalten bereits in ihrer Anfangskonfiguration eine verdrillte Flußröhre.
- Es gibt keinen Gegenstrom im Außenbereich der Flußröhre (wie in dem in Kapitel 3 betrachteten System), sondern das kraftfreie Gleichgewicht wird mit Hilfe des von den fiktiven Monopolen stammenden poloidalen Magnetfeldes konstruiert.
- Die untersuchten kraftfreien Gleichgewichte stellen gemischt bipolar-quadrupolare Konfigurationen dar.

Dieses Kapitel gliedert sich wie folgt. In Abschn. 4.2 wird die numerische Methode beschrieben. In Abschn. 4.3 werden die Stabilität und zeitliche Entwicklung der Flußröhre für unterschiedlich starke anfängliche Verdrillungen untersucht. Es werden die Schwellwerte für das Auftreten der Kink-Instabilität bestimmt sowie deren Wachstumsraten für unterschiedliche Verdrillungen gemessen. Dabei werden der Torusradius R und das Plasma-Beta β variiert. Abschn. 4.4 enthält eine Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse. Ein ausführlicher Vergleich der Ergebnisse mit der Beobachtung solarer Eruptionen erfolgt gesondert in Kapitel 5.

4.2 Numerische Methode

Die Simulationen werden wie in Kapitel 3 unter Vernachlässigung der Gravitation und (zunächst) des thermischen Druckes im Rahmen der idealen MHD ausgeführt. Die zeitliche Entwicklung des untersuchten Systems wird somit durch das reduzierte Gleichungssystem (3.37)–(3.39) beschrieben. Die Bedingung $\beta = 0$ garantiert, daß numerisch erhaltene

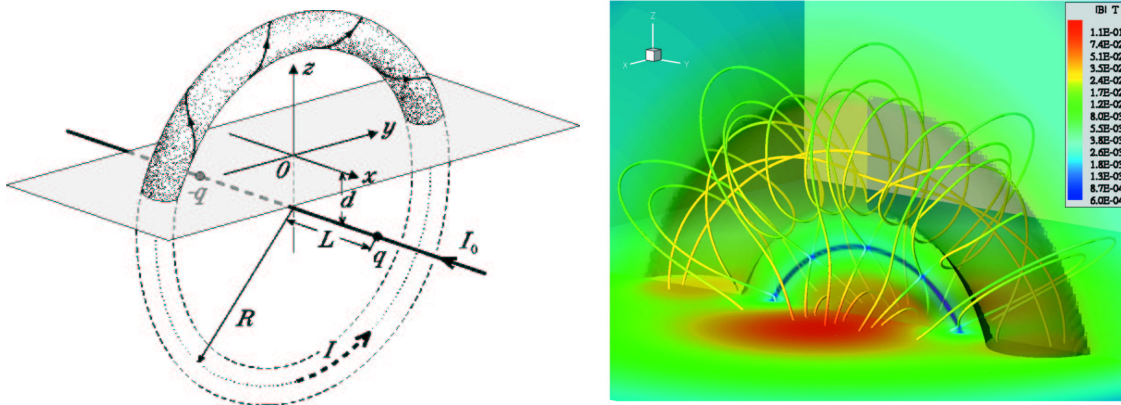


Abbildung 30: Modell einer bogenförmigen verdrehten magnetischen Flußröhre nach Titov & Démoulin [74] (für Details siehe Text). Die rechte Abbildung zeigt magnetische Feldlinien einer Konfiguration mit verschwindendem Linienstrom I_0 aus einer Simulation von Roussev et al. [26]. Die magnetische X-Linie ist blau hervorgehoben.

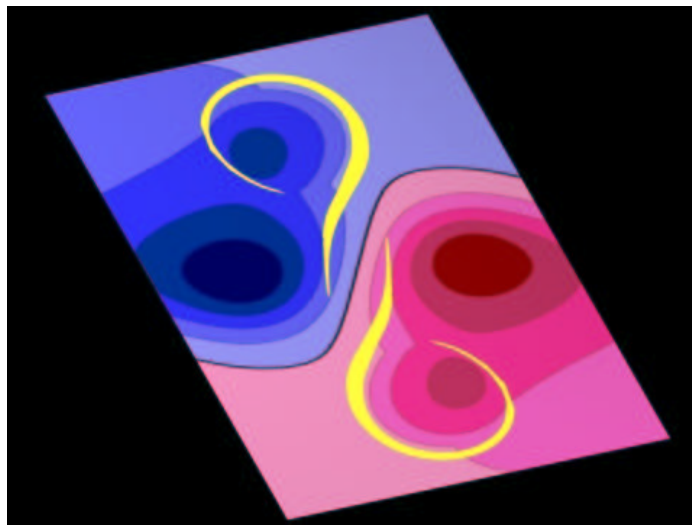


Abbildung 31: Darstellung der photosphärischen Magnetflußverteilung im TD-Gleichgewicht, die die gemischt bipolar-quadrupolare Konfiguration veranschaulicht. Man erkennt die beiden Hauptpolaritäten („Sonnenflecken“, links und rechts) und die beiden parasitären Polaritäten (Flußröhrenfußpunkte, oben und unten). Die gelben hakenförmigen Strukturen kennzeichnen die Schnittfläche der Quasi-Separatrix-Flächen [78] mit der Photosphäre. Die roten (blauen) Bereiche kennzeichnen Gebiete positiver (negativer) Normalkomponente des Magnetfeldes. Die schwarze Linie stellt die magnetische Neutrallinie, $B_z(x, y, 0) = 0$, dar, die die unterschiedlichen Polaritäten trennt.

Gleichgewichte kraftfrei sind. Zur Untersuchung des Einflusses des thermischen Drucks auf die Wachstumsraten der Kink-Instabilität werden einige der Simulationen mit $\beta > 0$ wiederholt. In diesen Fällen wird die Entwicklung des Systems durch das Gleichungssystem (2.16)–(2.19) beschrieben.

Die Normierung der Gleichungen erfolgt analog zu Abschn. 3.2 durch Größen, die sich aus der charakteristischen Längenskala (für die hier L gewählt wird) und aus $\tilde{B}_0(0, 0, R-d)$, $\tilde{\rho}_0(0, 0, R-d)$ und $\tilde{v}_{a0}(0, 0, R-d)$ (dem anfänglichen Magnetfeld und der anfänglichen Plasmadichte bzw. Alfvégeschwindigkeit am Apex der Flußröhre) ergeben.

Die Ausdrücke für das anfängliche Magnetfeld sind sehr umfangreich und werden hier aus Platzgründen nicht dargestellt (hierfür sei auf TD verwiesen). Als Dichteverteilung wird $\rho_0 = B_0^2$ gewählt, d. h. es gilt in der gesamten Simulationsbox $v_{a0} = 1$. Da das Magnetfeld im TD-Gleichgewicht innerhalb der Flußröhre stärker ist als außerhalb, besitzt die Flußröhre damit eine höhere Dichte als ihre Umgebung. Die Simulationen werden entweder mit $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ oder mit einer Anfangsstörung des Systems gestartet (siehe Abschn. 4.3).¹⁵

Die numerische Methode ist analog zu Kapitel 3. Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß die Torusebene mit der Ebene $\{x = 0\}$ zusammenfällt. Hier wird ein Gitter mit $L_x = L_y = L_z/2 = 5$, $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = \Delta z_{\min} = 0.02$ und $141 \times 160 \times 200$ Gitterpunkten verwendet. Wie in den Relaxationsrechnungen des Kapitels 3 werden die Geschwindigkeiten in $(0, 0, -\Delta z)$ während der gesamten Integration auf Null gesetzt, da hier keine Wirbelbewegungen aufgeprägt werden.¹⁶ Die Behandlung der numerischen Diffusion wird gegenüber Kapitel 3 verbessert: hier werden die Variablen ρ , u_x , u_y und u_z anstelle von ρ , ρu_x , ρu_y und ρu_z der künstlichen Diffusion unterworfen, um den künstlichen Anstieg der Plasmadichte in den äußeren Bereichen der Simulationsbox im Verlauf der Simulation möglichst gering zu halten. Als Parameter werden $\nu = 0.05$ und $1 - \sigma_\rho = 1 - \sigma_u = 0.005$ gewählt. Die numerische Diffusion ist in den Simulationen dieses Kapitels stets räumlich konstant. Für Details zur Numerik sei auf Abschn. 3.2.3 und auf Anhang A verwiesen.

Die Verdrillung der Flußröhre wird analog zu Gl. (3.49) durch Mittelung über den Azimutwinkel ϕ am Apex der Flußröhre gemessen und im folgenden als Φ_{loop} bezeichnet. Es ist

$$\Phi_{\text{loop}} = (2/a^2) \int_0^a \langle \Phi(r) \rangle_\phi r dr, \quad (4.51)$$

¹⁵Die in Abschn. 3.2.1 beschriebene Vorbereitungsphase zur Reduzierung der anfänglichen Diskretisierungsfehler in der numerischen Berechnung der Stromdichte kann hier für instabile Gleichgewichtskonfigurationen nicht in derselben Weise durchgeführt werden. Da jedoch die Diskretisierungsfehler im Verlauf der Integration sehr schnell abnehmen, kann das System zum Zeitpunkt des Einsetzens der Kink-Instabilität (im allgemeinen nach einigen Alfvénzeiten) als hinreichend gut relaxiert angesehen werden.

¹⁶Die Extrapolation der Tangentialkomponenten des Magnetfeldes am unteren Rand der Simulationsbox (siehe Anhang A.5) gestattet eine (eingeschränkte) Entwicklung des Systems in der Grundfläche $\{z = 0\}$. Zur Überprüfung des Einflusses der photosphärischen Randbedingungen wurde die Simulation mit $R = 2.2$, $\Phi_{\text{loop}} = 4.9\pi$ und aufwärts gerichteter Anfangsstörung (siehe Abschn. 4.3) mit am unteren Rand festgehaltenem Magnetfeld wiederholt. Diese Testsimulation ergab qualitativ identische Resultate, wobei die Wachstumsrate der Kink-Instabilität um lediglich vier Prozent abnahm.

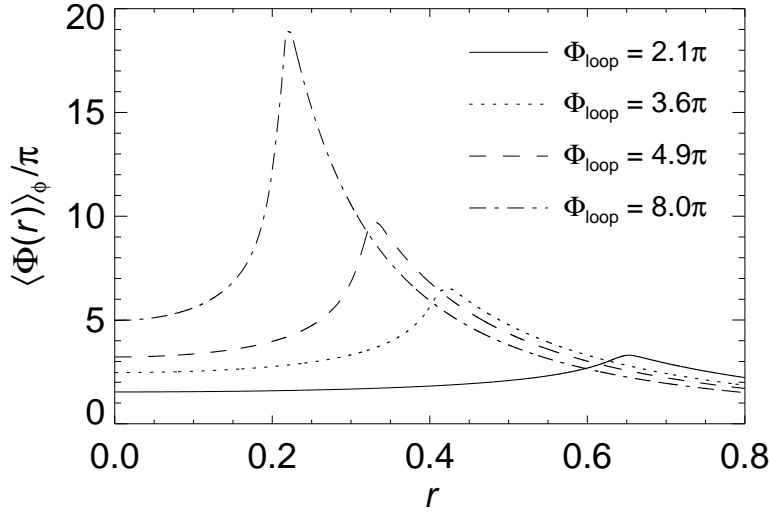


Abbildung 32: Radiale Profile der über den Azimutwinkel ϕ gemittelten Verdrillung im TD-Gleichgewicht.

wobei

$$\begin{aligned} \langle \Phi(r) \rangle_\phi &= (l/2\pi r) \int (B_\phi(r, \phi)/B_y(r, \phi)) d\phi, \\ l &= 2R \arccos(d/R), \\ r &= (x^2 + (z - R + d)^2)^{1/2} \quad \text{und} \\ \phi &= \arctan((z - R + d)/x) \end{aligned}$$

gelten. Hier bezeichnet l die Länge der Flußröhre. Die Verdrillung ist entlang der Flußröhre konstant und entlang des Röhrenquerschnitts radial veränderlich. Sie nimmt von der Achse zur Oberfläche der Röhre hin zu. Die Variation der Verdrillung wächst mit steigendem $N_t/(R/a)$ an. In Abb.32 sind die radialen Profile der Verdrillung für verschiedene Werte von Φ_{loop} dargestellt.

4.3 Kink-Instabilität der Flußröhre

Als erster Schritt der Untersuchung ist zu überprüfen, ob das lediglich näherungsweise kraftfreie TD-Gleichgewicht als Anfangskonfiguration numerischer Simulationen geeignet ist. Hierzu muß sich eine Konfiguration, von der angenommen werden kann, daß sie sowohl gegenüber der Kink-Mode als auch gegenüber der globalen Expansion stabil ist, in ein kraftfreies numerisches Gleichgewicht relaxieren lassen. Die für diesen Test verwendete Konfiguration entspricht der in TD untersuchten (siehe dortige Abb.4), wobei hier ein geringfügig größerer Torusradius R gewählt wird, um das Auftreten sogenannter „Bald Patches“ (Segmente der magnetischen Neutrallinie, die von konkav gekrümmten koronalen Feldlinien berührt werden, siehe [81, 82]) zu vermeiden, da diese nicht Gegenstand der hier durchgeführten Untersuchung sind. Die Parameter der betrachteten Konfiguration sind in

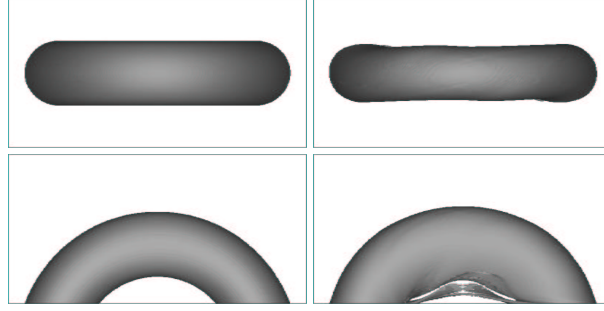


Abbildung 33: Isoflächen der Stromdichte mit $|\mathbf{j}| = 0.4 j_{\max}$ im Volumen $|x| \leq 1.5$, $|y| \leq 3$, $0 \leq z \leq 3$ (von oben und von der Seite gesehen). Dargestellt ist die Simulation mit $\Phi_{\text{loop}} = 2.1\pi$, $R = 2.2$ und $\beta = 0$ zu den Zeitpunkten $t = 0$ (approximatives analytisches Gleichgewicht von Titov & Démoulin [74]; *links*) und $t = 78$ (*rechts*).

Tabelle 3 aufgeführt. Sie führen auf $N_{\text{cor}} = 1.75$ und $\Phi_{\text{loop}} = 2.1\pi$, womit die Verdrillung der Flußröhre unterhalb des kleinsten bekannten Schwellwertes für das Einsetzen der Kink-Instabilität in zylindersymmetrischen Konfigurationen mit Fußpunktverankerung, $\Phi_c = 2.5\pi$, liegt. Die von Roussev et al. [26] gefundene Bedingung für Stabilität gegenüber der globalen Expansion, $R \lesssim 5L$, ist ebenfalls erfüllt, da hier $R = 2.2L$ gilt. Das negative Vorzeichen von I_0 bewirkt eine linkshändige Verdrillung ($\alpha < 0$) innerhalb der Flußröhre. Die Flußröhre besitzt somit dieselbe Händigkeit wie die in Kapitel 3 untersuchte. Die Simulation wird mit $\beta = 0$ durchgeführt, um Kraftfreiheit zu gewährleisten. Aus Abb. 33 geht hervor, daß die Flußröhre für den betrachteten Parametersatz in der Tat stabil ist und daß das numerisch erhaltene kraftfreie Gleichgewicht dem analytischen TD-Gleichgewicht sehr nahe kommt. Die Apexgeschwindigkeit oszilliert während der Simulation mit monoton sinkender Amplitude um Null. Bei Beendigung der Rechnung ($t = 78$) ist sie unter 9×10^{-5} gefallen. Unterhalb der Flußröhre bildet sich an der Position der HFT eine Stromschicht aus und es kommt zu einer leichten Ausbeulung der Flußröhre in diesem Gebiet (beide Effekte sind für Konfigurationen mit höherer unterkritischer Verdrillung deutlich weniger

R	d	L	N_t	q	I_0	a	I
110 Mm	50 Mm	50 Mm	5	100 Tm $^{-2}$	-7 TA	32.42 Mm	3.04 TA
2.2	1	1	5			0.65	

Tabelle 3: Physikalische Parameter einer stabilen Konfiguration des TD-Gleichgewichts. Für die geometrischen Parameter sind in der untersten Zeile die in den Simulationen verwendeten normierten Größen aufgeführt. Die vorgegebenen Größen R , d , L , N_t , q und I_0 legen die Werte von a und I fest. Die Verdrillung innerhalb der Flußröhre beträgt in dieser Konfiguration $\Phi_{\text{loop}} = 2.1\pi$. Die Parameter entsprechen bis auf R den Werten in der Abb. 4 in Titov & Démoulin [74].

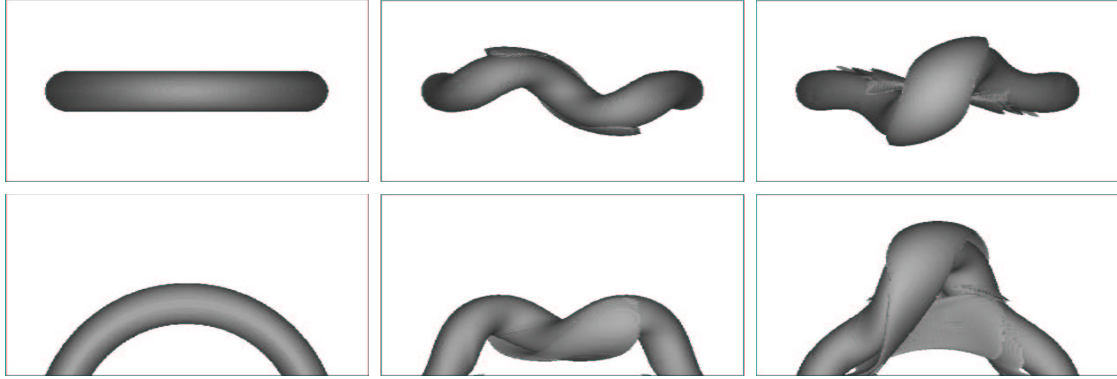


Abbildung 34: Isoflächen der Stromdichte im Volumen $|x| \leq 1.5$, $|y| \leq 3$, $0 \leq z \leq 3$ (von oben und von der Seite gesehen). Dargestellt ist die Simulation mit $\Phi_{\text{loop}} = 4.9\pi$, $R = 2.2$ und $\beta = 0$. *Links*: Anfangskonfiguration ($|\mathbf{j}| = 0.15 j_{\text{max}}$, $t = 0$). *Mitte*: Simulation ohne Anfangsstörung ($|\mathbf{j}| = 0.15 j_{\text{max}}$, $t = 35$). *Rechts*: Simulation mit nach oben gerichteter Anfangsstörung am Apex der Flußröhre ($|\mathbf{j}| = 0.25 j_{\text{max}}$, $t = 28$).

stark ausgeprägt).

Um die Stabilität der Konfiguration gegenüber äußeren Störungen zu überprüfen, wird die Simulation jeweils mit einer nach oben bzw. unten gerichteten, am Apex der Flußröhre lokalisierten Anfangsstörung wiederholt. Hierbei werden dem System vertikal gerichtete, in einem Kugelvolumen mit Radius a um den Apex gaußverteilte Geschwindigkeiten innerhalb eines Zeitraumes $t_1 = 10$ linear ansteigend von Null bis zum Maximalwert $u_1 = 0.05$ aufgeprägt und anschließend ausgeschaltet. Beide Störungen klingen innerhalb von $\sim 20\tau_a$ auf Werte nahe Null ab (zum Zeitpunkt $t = 78$ auf $u < 2 \times 10^{-4}$ und $u < 3 \times 10^{-4}$ für die nach oben bzw. nach unten gerichtete Störung). Dies belegt, daß das von TD entwickelte Modell in sehr guter Näherung kraftfreie Gleichgewichte darstellt.

Nun kann untersucht werden, ob im TD-Gleichgewicht bei ausreichend starker Verdrillung eine Kink-Instabilität der Flußröhre auftritt. Hierzu wird durch Variation des Parameters N_t die Verdrillung der Flußröhre systematisch erhöht. Die Vergrößerung von N_t führt auf eine Verringerung des Röhrenradius a . Tabelle 4 gibt einen Überblick über die untersuchten Konfigurationen. In Konfigurationen mit $R = 2.2$ tritt für $N_t \geq 10$ die Kink-Instabilität auf. Im folgenden wird exemplarisch der Fall $N_t = 15$ ($\Phi_{\text{loop}} = 4.9\pi$) ausführlich erläutert. Die dargestellten Ergebnisse sind dabei qualitativ für alle in diesem Kapitel untersuchten kink-instabilen Konfigurationen gültig.

Abb. 34 macht deutlich, daß sich für $\Phi_{\text{loop}} = 4.9\pi$ die Kink-Mode sehr deutlich ausbildet, es kommt zu der aus zylindersymmetrischen Modellen bekannten helischen Verformung der Flußröhre. Die in der Bildmitte gezeigte Mode bildet sich spontan, d. h. ohne äußere Störung, aus. Sie wird durch die innerhalb der Flußröhre vorhandenen kleinen Lorentzkraftdichten angeregt.¹⁷ Aufgrund der in der Ebene $\{y = 0\}$ vorgeschriebenen Li-

¹⁷Die Lorentzkraftdichten sind zum einen durch die Diskretisierungsfehler bei der numerischen Berech-

niensymmetrie bezüglich der z -Achse gilt $u_x(0, 0, z) = u_y(0, 0, z) = 0$ (siehe Abschn 3.2.3). Daher kann sich der Apex der Flußröhre nur nach oben oder nach unten bewegen. Da die Lorentzkraftdichten in dieser Konfiguration überwiegend nach unten gerichtet sind, bewegt sich die Flußröhre während der Instabilität in Richtung der Grundfläche der Simulationsbox. Der rechte Teil der Abb. 34 zeigt dieselbe Konfiguration, der jedoch eine kleine, nach oben gerichtete Anfangsstörung ($u_1 = 0.01$, $t_1 = 5$) aufgeprägt wurde. In dieser Simulation wächst die Kink-Mode in ähnlicher Weise, nun jedoch bewegt sich die Flußröhre nach oben. Ähnlich wie in zylindersymmetrischen Konfigurationen führt das Anwachsen der Mode in beiden Fällen zur Ausbildung einer helisch geformten Stromschicht, die die Flußröhre umwindet (vergl. mit Abb. 8 rechts). Im Fall der sich nach oben bewegenden Flußröhre kommt es zusätzlich unterhalb der Röhre an der Position der HFT zur Ausbildung einer vertikalen Stromschicht, die in zylindersymmetrischen Konfigurationen nicht auftritt. Die Projektion der Flußröhre auf die Grundfläche der Simulationsbox weist für die aufsteigende Röhre eine S-Form und für die absinkende Röhre eine inverse S-Form auf (Abb. 34). Auf die Bedeutung der vertikalen Stromschicht und der helischen Verformung der Flußröhre für die Interpretation koronaler Sigmoide wird in Abschn. 5.1 ausführlich unterhalb der Stromdichte und zum anderen aufgrund der Annahme lokaler Zylindersymmetrie in den Näherungsformeln des TD-Gleichgewichts stets vorhanden und relaxieren für stabile Konfigurationen zu sehr kleinen Werten (in der Simulation mit $N_t = 5$ nimmt die Gesamtlorentzkraft in der Simulationsbox während der Rechnung um zwei Größenordnungen ab).

R	N_t	a	Φ_{loop}/π	δ	$\gamma_{\text{up}} a/v_{a0}$	$\gamma_{\text{down}} a/v_{a0}$
2.2	5	0.65	2.1	0.88	0	0
	9	0.44	3.3	0.96	0	0
	10	0.42	3.6	0.98	0.008 [†]	0.001 [†]
	12	0.37	4.2	1.00	0.031 [†]	0.023
	15	0.32	4.9	1.03	0.059 [†]	0.052
	20	0.27	6.0	1.06	0.088 [†]	0.076
	25	0.24	7.0	1.08	0.102	0.091 [†]
	30	0.21	8.0	1.10	0.111	0.100 [†]
3.4	9.1	0.44	5.0	0.80	0.005	
	11.4	0.38	6.0	0.83	0.021	
	13.9	0.34	7.0	0.87	0.034	
	16.4	0.31	8.0	0.89	0.044	

Tabelle 4: Normierte Parameter der Simulationen mit $d = L = 1$ und $\beta = 0$ sowie Wachstumsraten der Kink-Instabilität für nach oben und nach unten gerichtete Anfangsstörungen. Es ist $\delta = (a/l)\Phi_{\text{loop}}$. Die mit einem Dag versehenen Wachstumsraten wurden aus Simulationen mit Anfangsstörung erhalten.

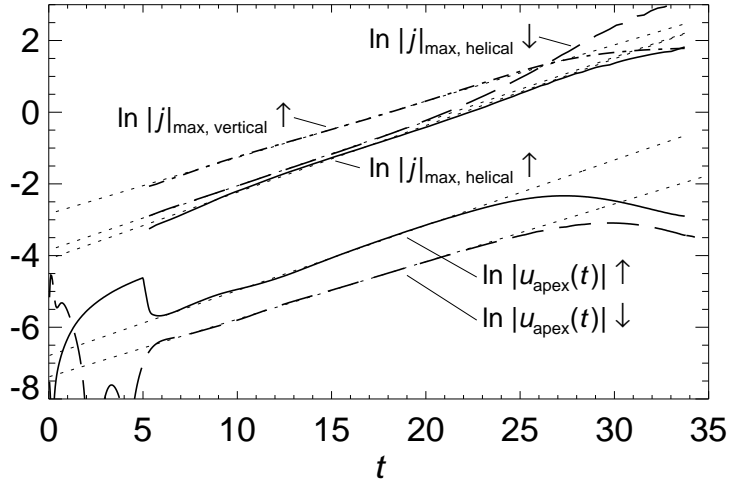


Abbildung 35: Apexgeschwindigkeit $u_z(0, 0, z, t)$ der Flußröhre und maximale Stromdichte $|j(0, 0, z, t)|_{\max}$ in der helischen und in der vertikalen Stromschicht für nach oben (↑) und nach unten (↓) gerichtete Anfangsstörungen in logarithmischer Darstellung. Es sind $R=2.2$, $\Phi_{\text{loop}}=4.9\pi$ und $\beta=0$. Die an die Datenpunkte angepaßten Exponentialfunktionen sind gepunktet aufgetragen.

eingegangen.

In Abb. 35 sind die zeitliche Entwicklung der maximalen Stromdichten in den verschiedenen Stromschichten und die Apexgeschwindigkeiten der Flußröhre für die beiden beschriebenen Fälle aufgetragen. Beide Größen wachsen während der Simulation exponentiell an. Dies ist ein klarer Hinweis darauf, daß tatsächlich eine Instabilität auftritt (die über die gesamte Simulationsbox integrierte kinetische Energie zeigt ebenfalls ein exponentielles Wachstum). Die maximale Stromdichte in den Stromschichten übersteigt während der nichtlinearen Phase der Instabilität die maximale Stromdichte in der Flußröhre. Die aufsteigende Flußröhre bewegt sich geringfügig schneller als die absinkende. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die durch das toroidale Magnetfeld hervorgerufenen Rückstellkräfte und die Abbremsung durch die Trägheit des umgebenden Plasmas und die Annäherung an den geschlossenen Boxrand für die aufsteigende Flußröhre geringer sind. Es ist zu erwarten, daß eine horizontal gerichtete Anfangsstörung, die eine in erster Näherung bezüglich der Flußröhrenachse azimuthal phasenverschobene Mode anregen sollte, in quantitativ ähnlicher Weise anwächst wie die hier betrachteten vertikalen Störungen.

Aus den Abb. 35 und 36 ist zu entnehmen, daß die Instabilität während ihrer nichtlinearen Phase zu sättigen beginnt, was sich in der Abnahme der Apexgeschwindigkeiten bemerkbar macht. Die Stromdichten in den Stromschichten nehmen jedoch während dieser Phase weiter zu und führen auf numerische Instabilitäten.¹⁸ Die Sättigung der Instabilität

¹⁸Den Instabilitäten kann durch eine deutliche Erhöhung der künstlichen Diffusion begegnet werden, wie in weiterführenden Simulationen, die in Abschn. 5.2 dargestellt sind, gezeigt wird. Dort wird auch eine weitere Methode zur Vermeidung numerischer Instabilitäten vorgestellt.

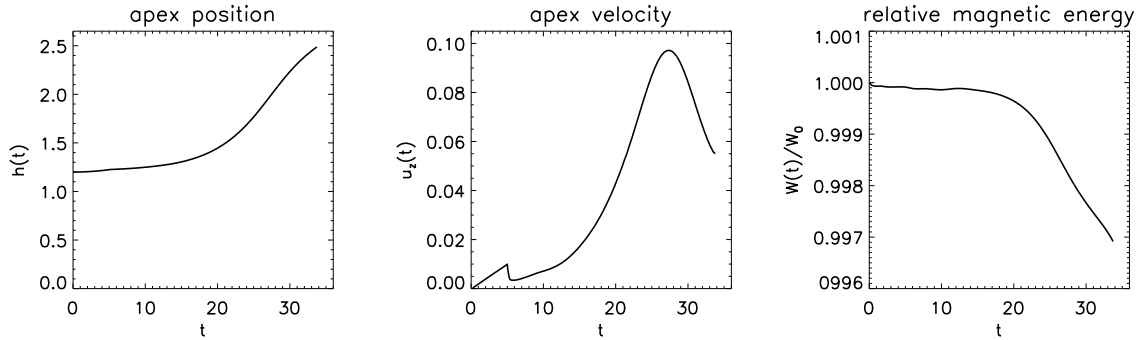


Abbildung 36: *Links und Mitte*: Apexhöhe bzw. Apexgeschwindigkeit der kink-instabilen Flußröhre für die in Abb. 34 rechts dargestellte Konfiguration mit $R = 2.2$, $\Phi_{\text{loop}} = 4.9\pi$, $\beta = 0$ und nach oben gerichteter Anfangsstörung. *Rechts*: „relative magnetische Energie“ in der gesamten Simulationsbox.

ist in erster Linie auf den sehr langsamen Abfall des vom Linienstrom I_0 erzeugten toroidalen Magnetfeldes mit der Höhe über der Photosphäre zurückzuführen (siehe auch Roussev et al. [26]). Eine Eruption der Flußröhre findet im Gegensatz zu Kapitel 3 nicht statt. Ihr anfänglich exponentieller Aufstieg und ihre helische Verformung befinden sich jedoch in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Beobachtung instabiler Protuberanzen, denen es nicht gelingt, die Sonne zu verlassen [4]. Hierauf wird in Abschn. 5.2 ausführlich eingegangen. Die aufsteigende Flußröhre erreicht im Verlauf der Simulation ihre doppelte Anfangshöhe und eine Maximalgeschwindigkeit von $u \approx 0.1$ (Abb. 36). Die erzielte Auslenkung der Flußröhre von ihrer Ruhelage ist damit aller Wahrscheinlichkeit nach spürbar größer als in kink-instabilen zylindersymmetrischen Flußröhren (eine systematische Untersuchung der Größe dieser Auslenkung in zylindersymmetrischen Modellen konnte in der Literatur nicht gefunden werden).

Die gesamte magnetische Energie des Systems nimmt um ~ 0.3 Prozent ab. Dieser Wert ist mit der in Abschn. 3.3.3 gefundenen Abnahme der magnetischen Energie während der Relaxationsrechnung bei $\Phi = 2.95\pi$ des in Kapitel 3 betrachteten System vergleichbar. Aus Abb. 36 ist ersichtlich, daß die hauptsächliche Abnahme der magnetischen Energie während des Anstiegs und somit während der helischen Verformung der Flußröhre erfolgt, wie für die Kink-Instabilität zu erwarten ist (siehe Abschn. 2.3). In Abschn. 5.2 wird die Abnahme der magnetischen Energie für unterschiedliche Verdrillungen gemessen und mit der für solare Eruptionen notwendigen Energie verglichen.

Aus den in Abb. 35 logarithmisch aufgetragenen Apexgeschwindigkeiten kann die Wachstumsrate der Instabilität ermittelt werden. In Abb. 37 sind die Wachstumsraten für sämtliche hier durchgeführten Simulationen als Funktion der Verdrillung der Flußröhre dargestellt. Für $R = 2.2$ werden die Wachstumsraten jeweils für die aufsteigende und die absinkende Flußröhre angegeben. Bei höheren Verdrillungen ($\Phi_{\text{loop}} \geq 7.0\pi$) steigt die kink-instabile Flußröhre in allen Fällen spontan auf. In diesen Fällen wurde die Simulation

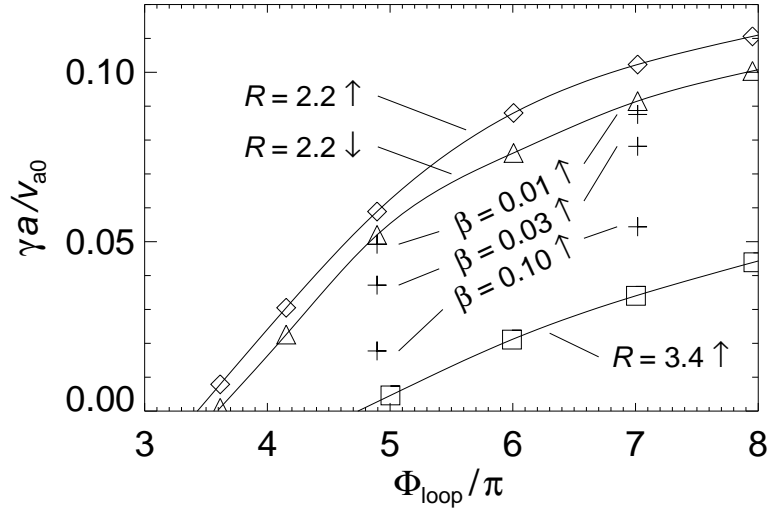


Abbildung 37: Wachstumsraten der Kink-Instabilität für zwei unterschiedliche Torusradien R . Die Wachstumsraten wurden mit Hilfe der nach oben (\uparrow) und nach unten (\downarrow) gerichteten Apexgeschwindigkeiten der Flußröhre erhalten und sind auf diejenige Zeit normiert, die benötigt wird, um den jeweiligen anfänglichen Röhrenradius a mit Alfvéngeschwindigkeit zu durchlaufen. Offene Symbole beziehen sich auf Simulationen mit $\beta = 0$. In allen Simulationen mit $\beta > 0$ ist $R = 2.2$. Angegeben sind die Werte von β auf der Flußröhrenachse zum Zeitpunkt $t = 0$.

mit einer nach unten gerichteten Störung wiederholt (siehe Tabelle 4).

Aus den Wachstumsraten kann die kritische Verdrillung abgeschätzt werden. Für $R = 2.2$ ergibt sich $\Phi_c \approx 3.5\pi$, wobei am Schwellwert der Instabilität $R/a \approx 5$ gilt. Die gefundene kritische Verdrillung ist ähnlich zu den in Untersuchungen zylindersymmetrischer Flußröhren mit vergleichbaren radialen Verdrillungsprofilen gefundenen Werten (siehe z. B. [46, 47]). Die Wachstumsraten können nach geeigneter Normierung ($\gamma a / v_{a0} [\Phi_{loop} - \Phi_c]$) ebenfalls mit den in Abb. 9 gezeigten Ergebnissen von Mikić et al. [46] und Baty & Heyvaerts [47] verglichen werden. Die hier gefundenen Wachstumsraten zeigen mit zunehmender Verdrillung einen qualitativ analogen Verlauf, sind jedoch um etwa einen Faktor zwei kleiner. Dieser Unterschied ist auf die hier verwendete relativ hohe Viskosität ($\nu = 0.05$) zurückzuführen.¹⁹

Die Vergrößerung des Torusradius auf $R = 3.4$ führt auf eine qualitativ identische Entwicklung des Systems mit geringeren Wachstumsraten (Abb. 37). Für größere R nimmt bei gleicher Verdrillung das Verhältnis R/a bzw. l/a (wobei hier l die Länge der Flußröhre bezeichnet) ab und die kritische Verdrillung nimmt zu ($\Phi_c \approx 4.7\pi$ für $R = 3.4$ bei $R/a \approx$

¹⁹Die Wiederholung einiger der hier beschriebenen Simulationen mit $\nu = 0.005$ ergab nahezu identisch die von Mikić et al. [46] und Baty & Heyvaerts [47] gefundenen Wachstumsraten, führte jedoch wesentlich früher auf numerische Instabilitäten. Die Wachstumsraten ändern sich bei weiterer Verringerung der Viskosität nicht mehr.

8). Dies ist in Übereinstimmung mit dem von Baty [51] gefundenen Ergebnis, wonach die kritische Verdrillung in zylindersymmetrischen Flußröhren stark zunimmt, wenn der Radius der Röhre klein wird, d. h. wenn $\delta = (a/l)\Phi \lesssim 1$. In Tabelle 4 ist δ für sämtliche hier betrachteten Konfigurationen aufgeführt. Der Parameter δ liegt für $R = 2.2$ ungefähr bei eins und für $R = 3.4$ bereits deutlich unter eins.

Zur Untersuchung des Einflusses des thermischen Drucks wurden für $R = 2.2$ die Simulationen mit $\Phi_{\text{loop}} = 4.9\pi$ und $\Phi_{\text{loop}} = 7.0\pi$ jeweils für drei verschieden starke, anfänglich homogene Druckprofile wiederholt. Dabei wurde der thermische Druck so gewählt, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ entlang der Flußröhrenachse (auf der $|\mathbf{B}| = \text{const}$ ist) jeweils $\beta = 0.01$, $\beta = 0.03$ bzw. $\beta = 0.1$ gilt. Die Einbeziehung des thermischen Drucks führt ebenfalls auf eine qualitativ identische Entwicklung des Systems mit geringeren Wachstumsraten, wobei diese mit steigendem anfänglichem Druck monoton abnehmen (Abb.37). Folglich werden mit $\beta = 0$ die niedrigsten Schwellwerte der Kink-Instabilität in den jeweiligen Konfigurationen gefunden.

Schließlich kann noch überprüft werden, ob die Flußröhre in numerisch erhaltenen Gleichgewichtskonfigurationen, die sich nahe unterhalb des Schwellwertes der Kink-Instabilität befinden, eine stabile helische Verformung ausbildet. Diese Frage ist für die Erklärung persistenter Sigmoide von Interesse (siehe Abschn.3.4.3). Keine der betrachteten Gleichgewichtskonfiguration weist jedoch Anzeichen helischer Verformung auf. Die Flußröhre der Konfiguration mit $R = 2.2$, $N_t = 9$ und $\Phi_{\text{loop}} = 3.3\pi$, die sehr nahe am Schwellwert der Kink-Instabilität liegt, relaxiert selbst nach einer relativ starken, nach oben gerichteten Anfangsstörung ($u_1 = 0.05, t_1 = 10$) in ihre anfängliche Form ohne jegliches Anzeichen einer helischen Verformung. Die durch die „Verankerung“ der Flußröhre in der Ebene $\{z = 0\}$ hervorgerufene Brechung der axialen Symmetrie des TD-Gleichgewichts genügt nicht, um persistente Sigmoide zu erzeugen. Hierfür sind stärkere Eingriffe in das Gleichgewicht (z. B. eine geeignete Ersetzung des Linienstroms I_0) erforderlich. Entsprechende systematische Untersuchungen liegen jedoch außerhalb des Rahmens dieser Arbeit.

4.4 Zusammenfassung und Bewertung

- Das von Titov & Démoulin [74] entwickelte analytische und näherungsweise kraftfreie Gleichgewicht relaxiert für Verdrillungen, die unterhalb des Schwellwertes der Kink-Instabilität liegen, in ein kraftfreies numerisches Gleichgewicht, daß der analytischen Ausgangskonfiguration sehr ähnlich ist. Oberhalb einer kritischen Verdrillung Φ_c tritt die Kink-Instabilität auf.
- Unter Verwendung des TD-Gleichgewichts wurde erstmalig eine Untersuchung der Kink-Instabilität einer bogenförmigen magnetischen Flußröhre unter Berücksichtigung der Fußpunktverankerung durchgeführt. Dabei wurden für unterschiedliche geometrische Konfigurationen der Schwellwert der Instabilität bestimmt sowie die Wachstumsraten der Instabilität über einen weiten Bereich der Verdrillung gemessen.

- Wesentliche Eigenschaften der Kink-Instabilität, wie z. B. ihre Schwellwerte und Wachstumsraten sowie das Auftreten einer helisch geformten Stromschicht sind im hier betrachteten System analog zu zylindersymmetrischen Flußröhrenmodellen.
- Darüber hinaus wurden für den Fall der nach oben gerichteten Kink-Instabilität zwei wesentliche Effekte der Kink-Instabilität gefunden, die in zylindersymmetrischen Modellen nicht auftreten. Diese sind die starke Auslenkung der Flußröhre aus ihrer Ruhelage bei der Bewegung in das Gebiet niedrigerer Feldstärke und die Ausbildung einer vertikalen Stromschicht unterhalb der aufsteigenden Flußröhre.
- Das durch den Linienstrom des TD-Gleichgewichts erzeugte starke toroidale Magnetfeld verhindert die Eruption der aufsteigenden kink-instabilen Flußröhre. Dieses Resultat ist im Hinblick auf die Modellierung solarer Eruptionen jedoch nur auf den ersten Blick enttäuschend. Die Entwicklung der Flußröhre gibt Beobachtungen instabiler Protuberanzen, deren Aufstieg vor dem Verlassen der Sonne zum Stillstand kommt, in ausgezeichneter Weise wieder (siehe hierzu Abschn. 5.2). Dies unterstützt die seit langem bekannte Idee, daß kompakte Flares durch die Kink-Instabilität magnetischer Flußröhren ausgelöst werden können.
- Die Simulationsergebnisse deuten darüber hinaus aus mehreren Gründen deutlich darauf hin, daß die Kink-Instabilität in bogenförmigen magnetischen Flußröhren auch als auslösender Prozeß großskaliger solarer Eruptionen in Frage kommt. Diese sind im einzelnen:
 1. Die aufsteigende Flußröhre weist eine helische Verformung auf, wie sie auch in vielen ausbrechenden Protuberanzen beobachtet wird.
 2. Die hohe Auslenkung der aufsteigenden Flußröhre aus ihrer Ruhelage deutet darauf hin, daß der Aufstieg der Röhre lediglich durch das im TD-Gleichgewicht unrealistisch starke umgebende Magnetfeld gestoppt wird. Dies wird in Abschn. 5.3 mit Hilfe einer Modifikation des Modells bestätigt.
 3. Die sich unterhalb der Flußröhre bildende vertikale Stromschicht ist das zentrale Element des seit Jahren weitestgehend akzeptierten „Standardmodells“ für die Hauptphase solarer Eruptionen.
 4. Mit Hilfe der in diesem Kapitel dargestellten Simulationen lassen sich die oftmals in der Anfangsphase solarer Eruptionen beobachteten transienten Sigmoide erklären (siehe hierzu Abschn. 5.1).

Die gefundenen Ergebnisse können als wichtiger Schritt hin zu einer vollständigen Erklärung solarer Eruptionen angesehen werden.

5 Vergleich der Simulationen des TD-Gleichgewichts mit der Beobachtung solarer Eruptionen

Im vorangegangenen Kapitel fanden sich sehr deutliche Hinweise darauf, daß die Kink-Instabilität verdrehter koronaler magnetischer Flußröhren als Erklärung des bislang unbekanntem Auslösungsmechanismus großskaliger solarer Eruptionen in Frage kommt. In diesem Kapitel wird diese Hypothese durch den Vergleich der Simulationsergebnisse des vorangegangenen Kapitels mit der Beobachtung solarer Eruption untermauert. In Abschn. 5.1 wird eine neue Interpretation transientser Sigmoiden vorgelegt. Das Aufsteigen zweier detailliert beobachteter instabiler Protuberanzen wird in Abschn. 5.2 auf die Kink-Instabilität zurückgeführt. Ferner wird in Abschn. 5.3 eine Modifikation des TD-Gleichgewichts vorgestellt, mit deren Hilfe die in Kapitel 4 noch nicht erreichte Eruption der kink-instabilen Flußröhre simuliert werden kann. Die dabei erhaltene Aufstiegscharakteristik der eruptiven Flußröhre wird mit dem Höhen-Zeit-Profil eines detailliert beobachteten CME verglichen. Die vorgestellte Modifikation stellt einen weiteren wichtigen Schritt auf dem Wege zur vollständigen Erklärung solarer Eruptionen dar.

5.1 Transiente Sigmoiden

Die Projektion der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen linkshändig verdrehten aufsteigenden kink-instabilen Flußröhre ($\alpha < 0$) auf die Grundfläche der Simulationsbox weist eine S-Form auf (Abb. 34 rechts, vergl. mit Abb. 29). Dies widerspricht der von Pevtsov et al. [71] gefundenen und in Abschn. 3.4.3 erläuterten Korrelation zwischen der Händigkeit der Verdrehung aktiver Regionen und der Ausrichtung koronaler Sigmoiden, die im folgenden als σ - α Korrelation bezeichnet werden soll. Es ist zu erwarten, daß dieses Verhalten für rechtshändige verdrehte Flußröhren ($\alpha > 0$) ebenso auftritt. Eine Wiederholung der in Abb. 34 gezeigten Simulationen mit $\alpha > 0$ (wozu lediglich das Vorzeichen des Linienstromes I_0 umzukehren ist) bestätigt dies. Die zeitliche Entwicklung des Systems verläuft identisch zu $\alpha < 0$, nun jedoch weisen sowohl die aufsteigende als auch die absinkende Flußröhre eine helische Verformung auf, die der in Abb. 34 gezeigten entgegengesetzt ist. Im Falle der aufsteigenden Röhre widerspricht dies erneut der σ - α Korrelation (siehe Abb. 38 unten).

In allen vier Fällen (aufsteigende und absinkende Flußröhre mit $\alpha < 0$ bzw. $\alpha > 0$) entspricht die Händigkeit der helischen Verformung der Röhre der Händigkeit der Verdrehung der Feldlinien innerhalb der Röhre. Dies ist eine allgemeingültige Eigenschaft der Kink-Instabilität und wird in der Literatur gelegentlich als „Resonanz am Punkt marginaler Instabilität“ bezeichnet (siehe z. B. [83]). Daraus läßt sich aufgrund der σ - α Korrelation direkt schließen, daß transiente Sigmoiden *nicht* mit ausbrechenden kink-instabilen Flußröhren identifiziert werden können, wie von der Mehrheit der Autoren bislang getan (siehe z. B. [9]). Daher müssen transiente Sigmoiden mit einer anderen Teilstruktur eruptiver magnetischer Flußsysteme assoziiert werden.

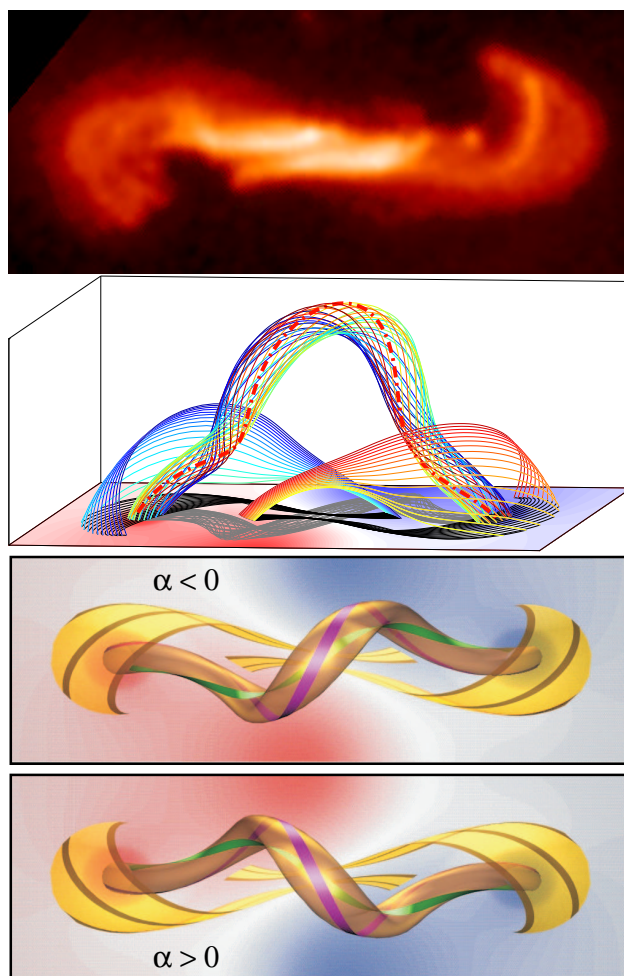


Abbildung 38: *Oben*: SXR-Beobachtung eines transienten Sigmoids in der aktiven Region AR 7792 während der Anfangsphase einer solaren Eruption am 25.10.1994 (Yokkoh-Aufnahme, siehe Manoharan et al. [84]). Die aktive Region wies überwiegend linkshändige Verdrillung ($\alpha < 0$) auf [64, 85]. *Mitte*: Magnetische Feldlinien der in Abb.34 rechts gezeigten Simulation im Gebiet $|x| \leq 0.8$, $|y| \leq 3$, $0 \leq z \leq 2.2$. Dargestellt sind Feldlinien der kink-instabilen Flußröhre (auf einer Flußfläche mit $r = a/2$) sowie Feldlinien, die einen Teil der unterhalb der Röhre befindlichen vertikalen Stromschicht einschließen. Eine der Feldlinien der Flußröhre ist hervorgehoben, um deren linkshändige Verdrillung zu verdeutlichen. In der Grundfläche sind die Normalkomponenten des Magnetfeldes (blau: $B_z > 0$ rot: $B_z < 0$) sowie Projektionen der Feldlinien gezeigt. *Unten*: Darstellung der von den magnetischen Feldlinien geformten Oberflächen im Gebiet $|x| \leq 1$, $|y| \leq 3$ (von oben betrachtet). Die im oberen Bild gezeigten Feldlinien sind mit denen der mittleren Abbildung identisch. Das untere Bild zeigt analog gewählte Feldlinien für die Konfiguration mit entgegengesetzter Händigkeit ($\alpha > 0$) zum selben Zeitpunkt der Simulation.

Um diese zu identifizieren, wird hier analog zu Abschn. 3.4.3 der von Titov & Démoulin [74] unterbreitete Vorschlag aufgegriffen, wonach Sigmoidale magnetische Strukturen sind, die sich von ihrer Umgebung durch eine höhere Stromdichte und somit durch eine höhere Heizung unterscheiden. Im hier untersuchten System treten die höchsten Stromdichten in den im Verlauf der Instabilität gebildeten Stromschichten auf. In Abb. 38 sind magnetische Feldlinien dargestellt, die die unterhalb der aufsteigenden Flußröhre gelegene vertikale Stromschicht durchlaufen. Diese Feldlinien weisen eine sigmoidale Struktur auf, die der σ - α Korrelation entspricht. Darüber hinaus geben sie weitere Eigenschaften transients Sigmoide überzeugend wieder, wie z. B. die typischerweise beobachtete annähernde Ausrichtung ihres zentralen Bereiches entlang der magnetischen Neutrallinie $B_z(x, y, 0) = 0$ und ihre fächerförmige, nach außen hin diffuser erscheinende Struktur (siehe Abb. 38).

Die beschriebenen Resultate lassen eine neue Interpretation transients Sigmoide zu: es handelt sich bei ihnen um Gruppen magnetischer Feldlinien, die die vertikale Stromschicht, die sich unterhalb der aufsteigenden kink-instabilen Flußröhre bildet, durchlaufen und daher aufgrund der in dieser Schicht erhöhten Dissipation in der Anfangsphase solarer Eruptionen im weichen Röntgenlicht aufleuchten.

Dieses Ergebnis wurde gleichzeitig mit Fan & Gibson [86] und unabhängig von ihnen gefunden. Fan & Gibson [86] simulierten das Aufsteigen einer verdrillten magnetischen Flußröhre aus der Konvektionszone in die Korona. Während des Aufsteigens der Röhre trat die Kink-Instabilität auf und führte analog zu den in dieser Arbeit dargestellten Simulationen zu einer helischen Verformung der Röhre, die der σ - α Korrelation widersprach, und zur Ausbildung einer vertikalen Stromschicht unterhalb der Röhre, deren Form von oben betrachtet der σ - α Korrelation entsprach. Die Resultate von Fan & Gibson [86] bestätigen die hier vorgestellte Interpretation transients Sigmoide.

Die absinkende kink-instabile Flußröhre (Abb. 34 Mitte) weist in Ergänzung zu der in Abschn. 3.4.3 beschriebenen Interpretation persistenter Sigmoide als kink-stabile, aber helisch verformte magnetische Flußröhren auf eine weitere mögliche Erklärung persistenter Sigmoide hin. Nach Sättigung der Instabilität (die in den Simulationen aufgrund numerischer Instabilität nicht erreicht werden konnte) könnte die Flußröhre eine stabile helisch verformte Struktur ausbilden, die in Übereinstimmung mit der σ - α Korrelation steht und deren zentraler Bereich annähernd entlang der magnetischen Neutrallinie ausgerichtet ist. Die Senke in der Mitte der Flußröhre sollte die Bildung einer Protuberanz begünstigen. Protuberanzen in aktiven Regionen werden oft in enger räumlicher Verbindung mit Sigmoiden beobachtet [87]. Die Überprüfung dieser Erklärungsmöglichkeit mittels MHD-Simulationen liegt jedoch außerhalb des Rahmens dieser Arbeit, da diese eine sehr detaillierte Behandlung der Energiegleichung unter Berücksichtigung der Wärmeleitung und radiativer Energieverluste sowie die Modellierung koronaler Heizung erfordern würde.

5.2 Instabile Protuberanzen

Ausbrechende Protuberanzen weisen in vielen Fällen eine verdrillte Struktur und eine deutlich sichtbare helische Verformung auf (Abb. 1 unten rechts, Abb. 39 und 40; siehe

auch [4, 5]). Dies legt nahe, sie als kink-instabile magnetische Flußröhren zu interpretieren. Um diese Interpretation zu bestätigen, wird in diesem Abschnitt die zeitliche Entwicklung zweier detailliert beobachteter instabiler und aufsteigender Protuberanzen mit numerischen Simulationen des TD-Gleichgewichts verglichen. Dabei werden zwei anfänglich qualitativ gleichartige, in der späteren Entwicklung jedoch voneinander abweichende Ereignisse betrachtet:

- Eine „nicht erfolgreiche“ Eruption, bei der die Protuberanz nach anfänglichem Höhengewinn bei etwa dem Fünffachen ihrer Anfangshöhe zum Stillstand kam und sich nicht in einen CME entwickelte (kompakter Flare).
- Eine „erfolgreiche“ Eruption, bei der die Protuberanz ausbrach und sich höchstwahrscheinlich in einen CME entwickelte (eruptiver Flare).²⁰

Es werden im einzelnen mit den Simulationen verglichen:

- Die helische Verformung der Protuberanzen.
- Die Aufstiegscharakteristik der Protuberanzen (Höhen-Zeit-Profil).
- Für den Fall der ausbrechenden Protuberanz zusätzlich die zeitliche Entwicklung der Verdrillung.

Hierfür wird für beide Ereignisse jeweils eine Simulation durchgeführt. Dabei werden die Zahl der Windungen der Feldlinien an der Oberfläche des Torus N_t und der Linienstrom I_0 des TD-Gleichgewichts (siehe Abschn. 4.1) so gewählt, daß zum einen die Kink-Instabilität auftritt, und zum anderen sowohl die helische Verformung als auch die Aufstiegscharakteristik der Protuberanzen reproduziert werden können. Eine Erhöhung von N_t (und damit der Verdrillung der Flußröhre) führt auf eine stärkere helische Verformung der Röhre. Eine Verringerung von I_0 führt auf ein weniger starkes über der Flußröhre gelegenes Magnetfeld und somit auf eine weniger starke Abbremsung des Aufstiegs der Röhre.

Um die Entwicklung der Flußröhren länger als über den in Abb. 36 dargestellten Zeitraum verfolgen zu können, wird in den hier beschriebenen Simulationen die künstliche Diffusion gegenüber den Simulationen des Kapitels 4 um den Faktor 10 erhöht, es gilt also $1 - \sigma_u = 1 - \sigma_\rho = 0.05$. Zur Erhöhung der Stabilität wird ferner vorgeschrieben, daß die Plasmadichte während der Simulation an jedem Gitterpunkt höchstens auf zehn Prozent ihres anfänglichen Wertes absinken darf.²¹

Des weiteren wird in den Simulationen dieses Abschnitts eine anfängliche Verteilung der Plasmadichte von $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|^{3/2}$ verwendet, die dem aus Beobachtungen abgeschätzten

²⁰Zum Zeitpunkt des betrachteten Protuberanzausbruches wurden aus technischen Gründen keine LASCO-Beobachtungen durchgeführt. Da die Beobachtungen erst wieder am Abend des darauffolgenden Tages aufgenommen wurden, kann nicht mit Sicherheit gesagt werden kann, ob ein begleitender CME stattfunden hat.

²¹Dieser Eingriff in die zeitliche Entwicklung der Dichte ist notwendig, da die durch die Aufteilung der Stromdichte in den Stromschichten hervorgerufene magnetische Rekonnexion (die hier aufgrund der numerischen Diffusion trotz idealer MHD auftritt) ansonsten zu negativen Plasmadichten führt.

leichten Abfall der Alfvéngeschwindigkeit mit der Höhe in aktiven Regionen [65] näher kommt als die in Kapitel 4 verwendete Verteilung $\rho_0 = B_0^2$. In beiden Fällen wird die Simulation mit einer kleinen, nach oben gerichteten Anfangsstörung ($u_1 = 0.02$, $t_1 = 2$) gestartet, um das Aufsteigen der Flußröhre zu erzwingen.

- „Nicht erfolgreiche“ Eruption

Dieses in Abb. 39 links gezeigte Ereignis wurde ausführlich in Ji et al. [4] beschrieben. Die Protuberanz kam nach anfänglich sehr schnell verlaufendem Aufstieg bei etwa dem Fünffachen ihrer Anfangshöhe zum Stillstand (Abb. 41 Mitte) und wurde von einem Flare begleitet, entwickelte sich jedoch nicht in einen CME [4].

Für die numerische Simulation werden $N_t = 21$ und $I_0 = 4.5$ TA gewählt, womit sich $\Phi_{\text{loop}} = 5.1\pi$ und der normierte Röhrenradius $a = 0.29$ ergeben. I_0 wird positiv gewählt, um die rechtshändige helische Verformung der Protuberanz zu reproduzieren. Die Bildfolge auf der rechten Seite der Abb. 39 illustriert die Entwicklung der Flußröhre während der Simulation. Ihre helische Verformung stimmt ausgezeichnet mit der Beobachtung überein.

In Abb. 41 wird die Aufstiegscharakteristik der Flußröhre mit der Beobachtung verglichen. Auch hier findet sich eine bemerkenswerte Übereinstimmung. Die Flußröhre erreicht in der Simulation zum Zeitpunkt $t \approx 22$ eine maximale Apexgeschwindigkeit von $u \approx 0.14$ und wird danach abgebremst. Die etwas später auftretende erneute Beschleunigung ist auf das Einsetzen magnetischer Rekonnexion in der helischen Stromschicht, die die Flußröhre umwindet, zurückzuführen. Die magnetische Rekonnexion findet trotz idealer MHD aufgrund der numerischen Diffusion statt. Sie verursacht eine Auftrennung des oberen Teils der Flußröhre (siehe Abb. 39 rechts unten). Die bereits zuvor erfolgte Abbremsung der Flußröhre ist hingegen nicht auf die magnetische Rekonnexion, sondern auf die stabilisierende Wirkung des über der Röhre gelegenen Magnetfeldes zurückzuführen.²²

In Abb. 41 unten ist die Entwicklung der „relativen magnetischen Energie“ bis zum Beginn der Abbremsung der Flußröhre dargestellt. Bis zu diesem Zeitpunkt erfolgt die Abnahme der magnetischen Energie wie zu erwarten hauptsächlich während des Ansteigens und der helischen Verformung der Flußröhre. Beim Erreichen der maximalen Apexgeschwindigkeit hat die magnetische Energie um ~ 0.5 Prozent abgenommen (vergl. mit Abb. 36). Dieser Wert entspricht einer Energiemenge von ca. $1.0 \times 10^{26} J$ und liegt damit bereits in dieser frühen Phase der Entwicklung des Systems im Bereich der aus der Beobachtung abgeschätzten, für große solare Eruptionen notwendigen Energie von $\sim 10^{25} J$ (siehe z. B. [12]). Die im späteren Verlauf der Simulation stattfindende magnetische Rekonnexion führt zu einer weiteren Abnahme der magnetischen Energie des Systems. Die Gesamtabnahme bis zum Ende der Simulation ($t = 52$) beträgt ~ 5.4 Prozent ($\sim 10^{27} J$).²³

²²Dies wurde durch eine Vergleichssimulation mit geringerem Linienstrom I_0 und vergleichbarer Verdrillung der Flußröhre überprüft. In dieser setzte die magnetische Rekonnexion erst ein, nachdem die Flußröhre fast vollständig zum Stillstand gekommen war.

²³Die hier und im folgenden Abschnitt gefundenen Werte der freigesetzten magnetischen Energie erscheinen etwas hoch. Es sei bemerkt, daß sie sehr stark von den anfänglich angenommenen Magnetfeldstärken abhängen, da diese quadratisch in die Berechnung der Energie eingehen. Die größten in den Simulationen des TD-Gleichgewichts auftretenden anfänglichen Feldstärken liegen bei ca. 0.05 T.

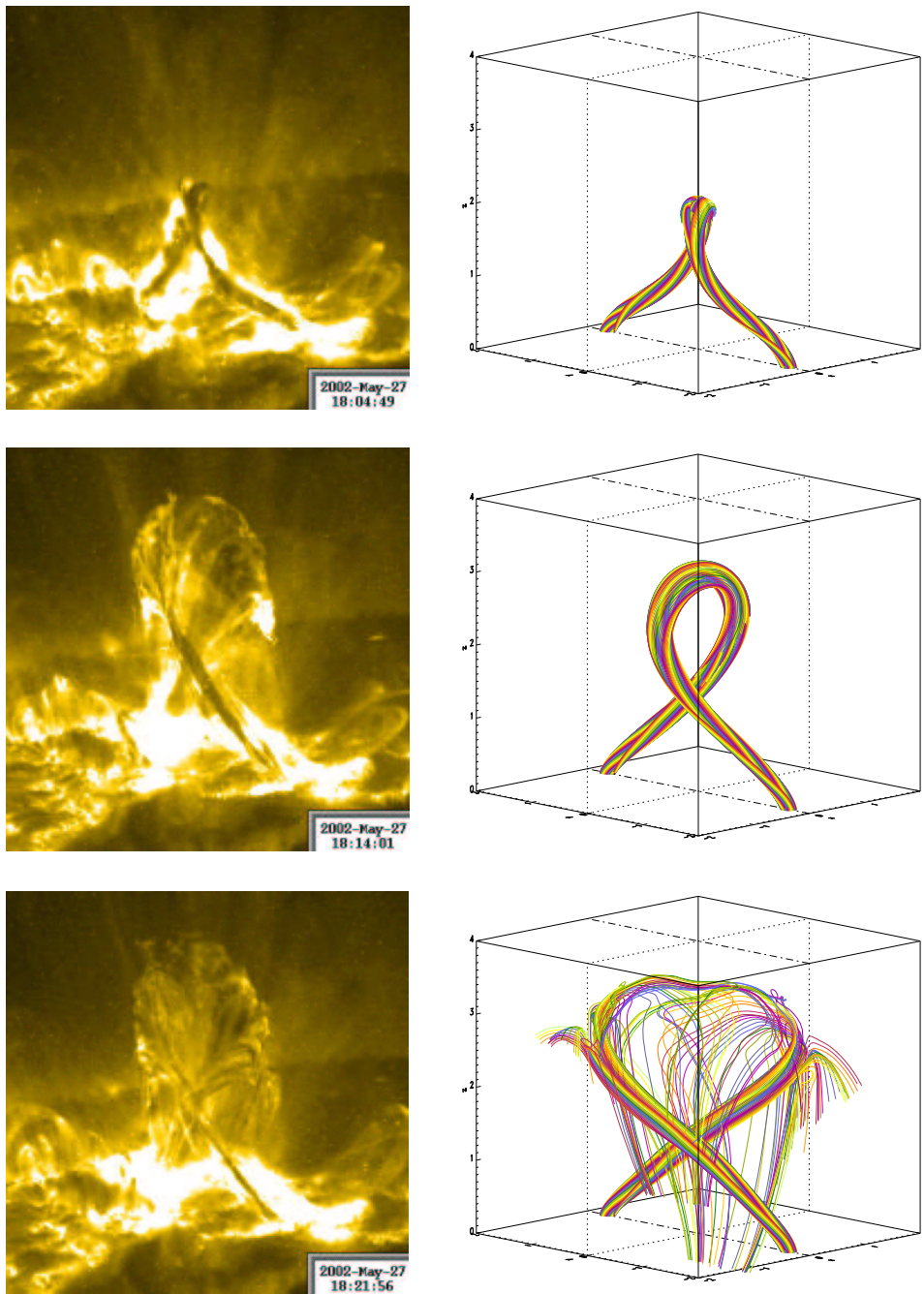


Abbildung 39: *Links*: Entwicklung der instabilen, aber nicht ausbrechenden Protuberanz vom 27.5.2002 (EUV-Aufnahmen des Satelliten TRACE, siehe Ji et al.[4]). *Rechts*: Magnetische Feldlinien der Flußröhre mit $\Phi_{\text{loop}} = 5.1\pi$ zu den Zeitpunkten $t = 22$, $t = 31$ und $t = 43$ (von oben nach unten). Im untersten Bild hat bereits magnetische Rekonnexion zwischen der Röhre und ihrem Umgebungsfeld eingesetzt.

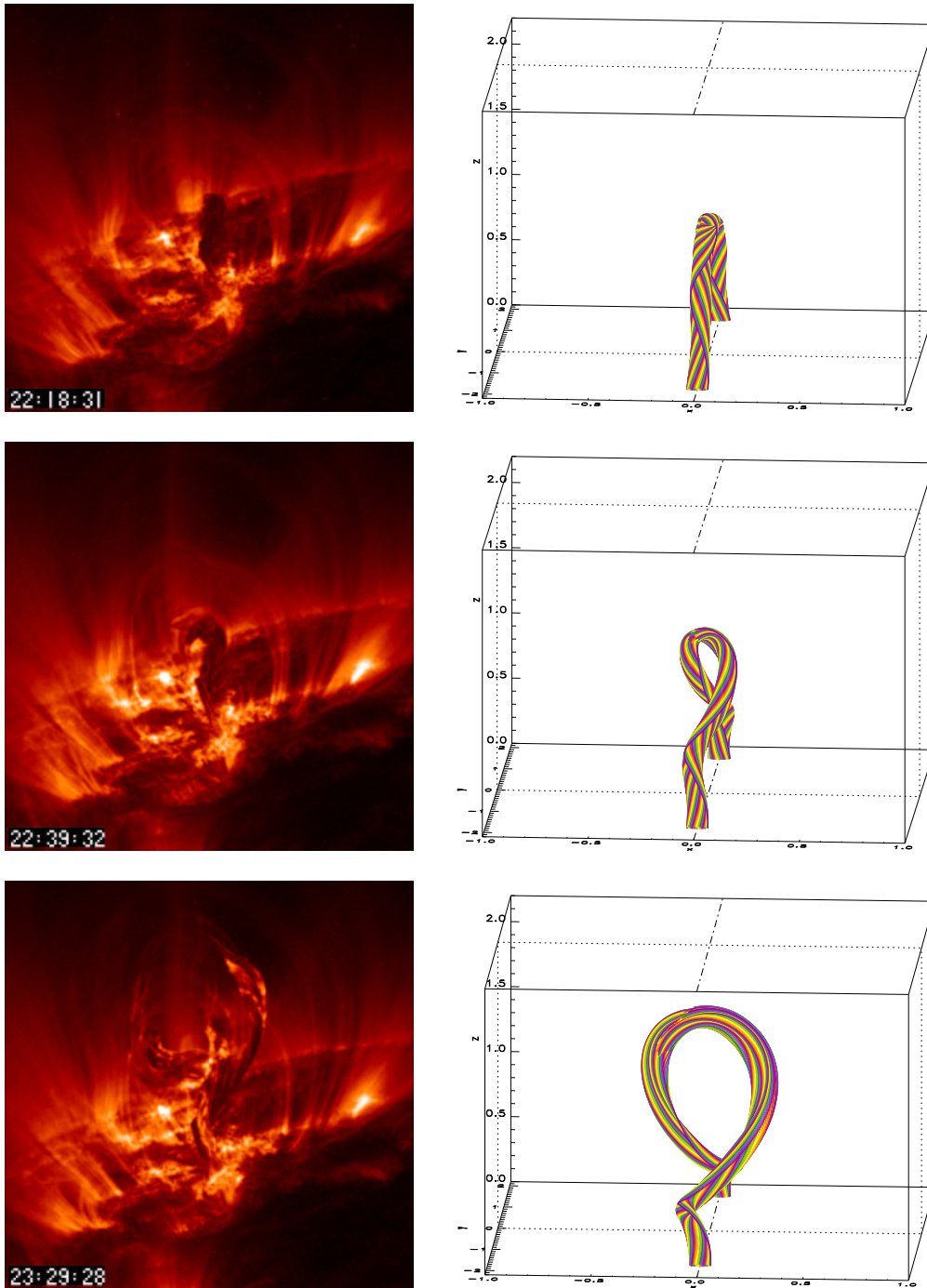


Abbildung 40: *Links*: Ausbrechende Protuberanz vom 19.7.2000 (EUV-Aufnahmen des Satelliten TRACE, siehe Romano et al. [5]) zu verschiedenen Zeitpunkten ihrer Entwicklung. *Rechts*: Magnetische Feldlinien der Flußröhre mit $\Phi_{\text{loop}} = 9.1\pi$ zu den Zeitpunkten $t = 0$, $t = 9$ und $t = 11$ (von oben nach unten).

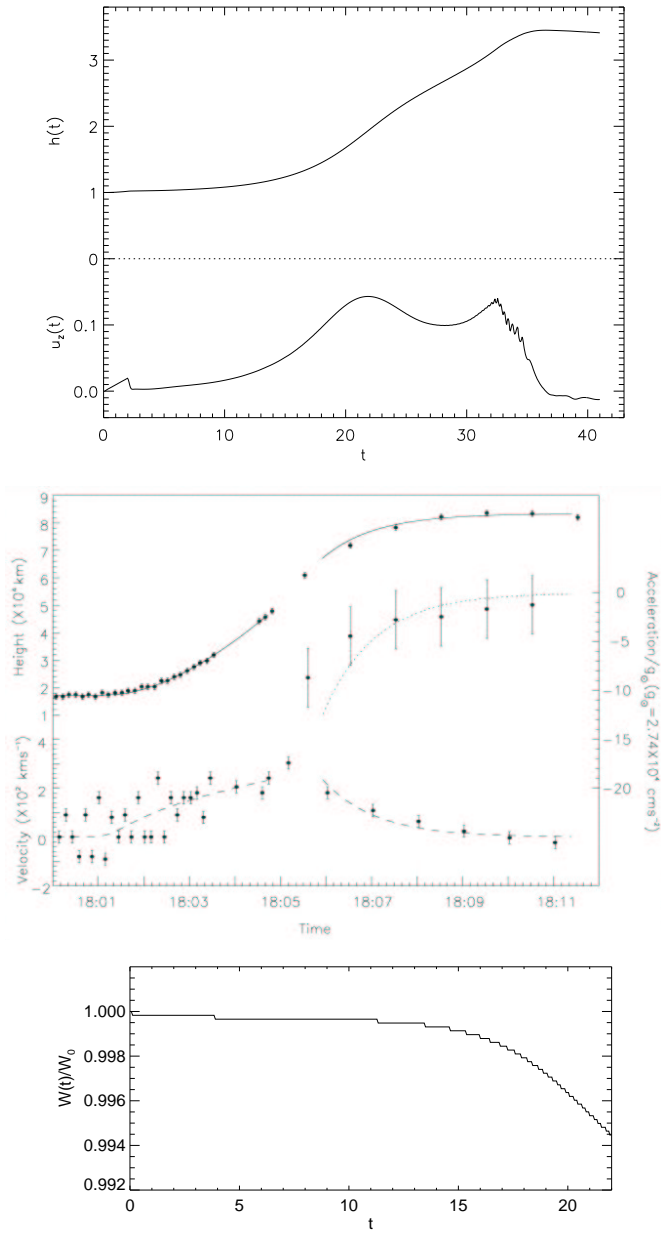


Abbildung 41: *Oben*: Entwicklung der Apexhöhe und Apexgeschwindigkeit der Flußröhre mit $\Phi_{\text{loop}} = 5.1\pi$. Der Anstieg der Apexgeschwindigkeit bei $t \approx 28$ ist auf die Rekonnexion der Flußröhre mit dem Umgebungsfeld zurückzuführen. *Mitte*: Höhe, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Apex der nicht ausbrechenden Protuberanz vom 27.5.2002 als Funktion der Zeit. Die Abbildung wurde Ji et al. [4] entnommen (siehe die dortige Erläuterung der Fehlerbalken). *Unten*: Entwicklung der „relativen magnetischen Energie“ in der gesamten Simulationsbox bis zum Erreichen der maximalen Apexgeschwindigkeit der Flußröhre in der oben gezeigten Simulation.

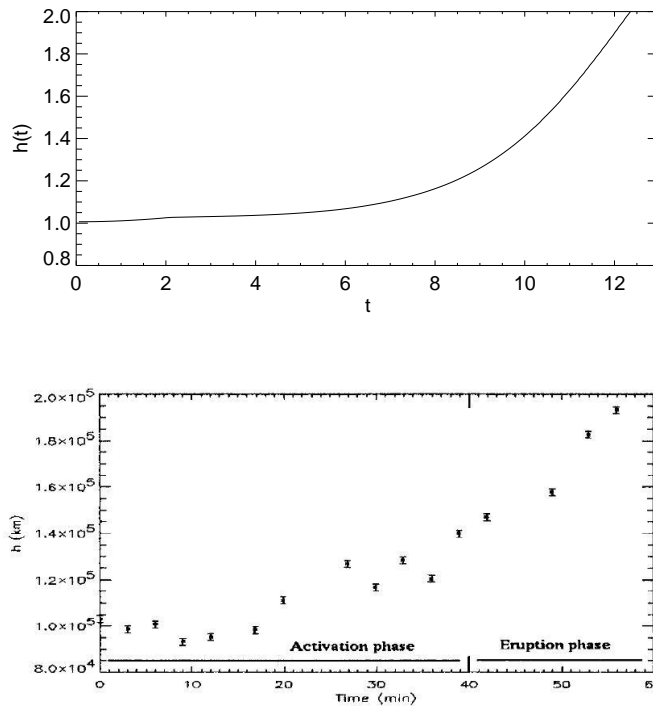


Abbildung 42: *Oben*: Entwicklung der Apexhöhe der Flußröhre mit $\Phi_{\text{loop}} = 9.1\pi$ bis zum Zeitpunkt des Erreichens der maximalen Apexgeschwindigkeit. *Unten*: Apexhöhe der ausbrechenden Protuberanz vom 19.7.2000 als Funktion der Zeit. Die Fehlerbalken kennzeichnen die Standardabweichung der Messwerte. Die Abbildung wurde Romano et al. [5] entnommen.

• „Erfolgreiche“ Eruption

Im Unterschied zu dem zuerst betrachteten Fall bricht in diesem Ereignis die Protuberanz aus (für Details siehe Romano et al. [5]). Für die numerische Simulation werden hier $N_t = 800$ und $I_0 = -0.23$ TA gewählt, womit sich $\Phi_{\text{loop}} = 9.1\pi$ und $a = 0.19$ ergeben. Wegen $I_0 < 0$ ist die Verdrillung linkshändig. Hier wird gegenüber der ersten Simulation ein deutlich kleinerer Linienstrom gewählt, um die stabilisierende Wirkung des oberhalb der Flußröhre gelegenen Magnetfeldes zu verringern und somit die Eruption der Flußröhre zu ermöglichen (in Analogie zur ausbrechenden Protuberanz).

Die Bildfolge auf der rechten Seite der Abb. 40 illustriert die helische Verformung der Flußröhre anhand magnetischer Feldlinien und Abb. 42 vergleicht die anfängliche Aufstiegscharakteristik der Flußröhre mit der anfänglichen Aufstiegscharakteristik der Protuberanz. Auch für dieses Ereignis findet sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der Beobachtung.

Die Herabsetzung von I_0 bewirkt wie erwartet trotz einer leichten Abbremsung der Flußröhre nach dem Erreichen der maximalen Apexgeschwindigkeit den Aufstieg des in-

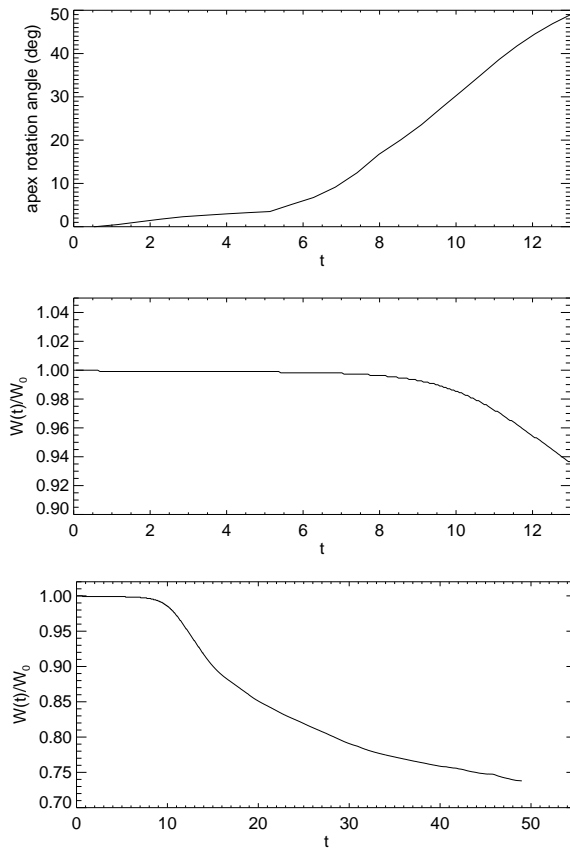


Abbildung 43: *Oben*: Entwicklung des am Apex gemessenen Rotationswinkel der Flußröhrenachse für die Flußröhre mit $\Phi_{\text{loop}} = 9.1\pi$ bis zum Erreichen der maximalen Apexgeschwindigkeit. *Mitte* und *Unten*: Entwicklung der „relativen magnetische Energie“ in der gesamten Simulationsbox innerhalb des oben gezeigten Zeitraumes und während der gesamten Simulation.

stabilen magnetischen Flusses bis zum oberen Boxrand (siehe auch Rousev et al.[26]), wobei die Flußröhre eine Maximalgeschwindigkeit von $u \approx 0.3$ erreicht. Auf die Eruption der Flußröhre wird hier nicht näher eingegangen, da keine entsprechende Beobachtung vorliegt (für die eruptive Entwicklung einer Flußröhre siehe Abschn. 5.3).

Die Abnahme der magnetischen Energie verläuft qualitativ analog zu der zuerst beschriebenen Simulation, ist jedoch hier deutlich größer, was auf die höhere Verdrillung der Flußröhre und auf das deutlich schwächere Umgebungsfeld zurückzuführen ist (Abb.43). Bis zum Beginn der (hier deutlich schwächeren) Abbremsung der Flußröhre hat die magnetische Energie um ca. 6 Prozent abgenommen, was in etwa $3.5 \times 10^{26} J$ entspricht. Damit ist die absolute Abnahme um einen Faktor 3.5 größer als in der obigen Simulation. Die hauptsächliche Abnahme vollzieht sich innerhalb dieses Zeitraumes erneut zeitgleich mit der helischen Verformung der Röhre. Wie in der oben beschriebenen Simulation fin-

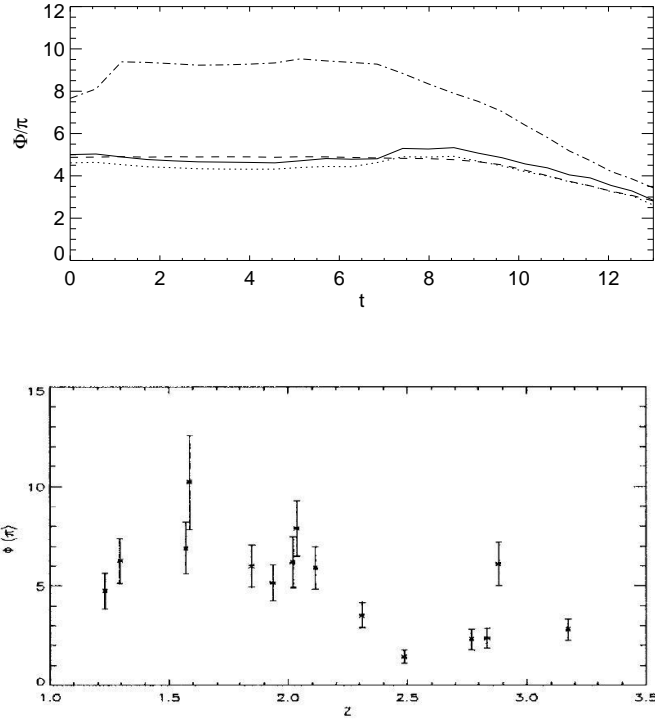


Abbildung 44: *Oben*: Entwicklung der über die gesamte Flußröhrenachse gemittelten Verdrillung der Flußröhre mit $\Phi_{\text{loop}} = 9.1\pi$ bis zum Erreichen ihrer maximalen Apexgeschwindigkeit. Die Mittelung über den Azimutwinkel wird dabei für vier unterschiedliche Radien r ausgeführt. *Durchgezogene Linie*: $r = 0.01a$; *gepunktete Linie*: $r = 0.1a$; *gestrichelte Linie*: $r = 0.5a$; *gepunktet-gestrichelte Linie*: $r = a = 0.19$. *Unten*: Gemessene Verdrillung der ausbrechenden Protuberanz vom 19.7.2000 als Funktion von $Z = h/d$, wobei h und d hier die Apexhöhe bzw. den halben Fußpunktanstand der Protuberanz bezeichnen. Zum Vergleich mit den oben gezeigten Werten sind die gemessenen Verdrillungen mit einem Faktor ≈ 2 zu multiplizieren. Die Grafik gibt von links nach rechts annähernd die zeitliche Entwicklung wieder. Die Fehlerbalken kennzeichnen die Standardabweichung der Messwerte. Die Abbildung wurde Romano et al. [5] entnommen.

det auch hier magnetische Rekonnexion der Flußröhre mit ihrem Umgebungsfeld statt, am Ende der Simulation ($t = 49$) hat die magnetische Energie um ca. 26 Prozent (in etwa $1.5 \times 10^{27} J$) abgenommen. Die prozentuale Abnahme liegt in der Größenordnung der in resistiven MHD-Simulation der Kink-Instabilität zylindersymmetrischer Flußröhren gefundenen Abnahme der magnetischen Energie (siehe Abschn. 2.3).

Romano et al. [5] schätzten, basierend auf einer von Vršnak et al. [88] entwickelten Methode, die zeitliche Entwicklung der Verdrillung der Protuberanz anhand einer helisch geformten, fadenförmigen Teilstruktur der Protuberanz ab. Sie fanden während des in Abb. 42 unten dargestellten Zeitraumes eine Abnahme der Verdrillung von $\Phi \approx 20\pi$ auf

$\Phi \approx 4\pi$ (die in Romano et al. [5] angegebenen und in Abb. 44 unten gezeigten Werte sind für den Vergleich mit der Simulation in etwa zu verdoppeln). Abb. 44 oben zeigt die Entwicklung der Verdrillung der Flußröhre bis zum Erreichen ihrer maximalen Apexgeschwindigkeit. In der hier durchgeführten Messung der Verdrillung wurde zusätzlich zu der in Abschn. 4.2 beschriebenen Mittelung über den Azimutwinkel eine weitere Mittelung über die gesamte Flußröhrenachse durchgeführt. Die Verdrillung nimmt während des Anstiegs und der helischen Verformung der Flußröhre für alle betrachteten Radien ab; für $r = a$ von $\Phi \approx 9\pi$ auf $\Phi \approx 3.5\pi$, womit sich erneut eine sehr gute Übereinstimmung mit der Beobachtung ergibt.²⁴

Die in beiden beschriebenen Simulationen erzielte ausgezeichnete Übereinstimmung mit der Beobachtung kann als Beweis für die folgenden Aussagen angesehen werden.

- Viele (wenn nicht alle) ausbrechenden Protuberanzen sind verdrillte magnetische Flußröhren.
- Das Aufsteigen der Protuberanzen und ihre helische Verformung sind auf die Kink-Instabilität zurückzuführen.

Dies belegt in überzeugender Weise die in dieser Arbeit aufgestellte Hypothese, daß die Kink-Instabilität verdrillter koronaler magnetischer Flußröhren solare Eruptionen auslösen kann. Die bei der Messung der Verdrillung der Flußröhre der zweiten Simulation gefundene sehr gute Übereinstimmung mit Romano et al. [5] deutet ferner darauf hin, daß die Verdrillung von Protuberanzen zukünftig durch eine Kombination von Beobachtung und Modellrechnung mit höherer Genauigkeit als bisher ermittelt werden kann.

5.3 Beschleunigung von CMEs

Wie in Abschn. 4.3 beschrieben, wird der Aufstieg der kink-instabilen Flußröhre des TD-Gleichgewichts durch das starke, vom Linienstrom I_0 erzeugte toroidale Umgebungsfeld bereits nach dem Erreichen der ca. doppelten Anfangshöhe deutlich verlangsamt (siehe Abb. 36). Im vorangegangenen Abschnitt wurde bereits erwähnt, daß die Flußröhre nach Verringerung des Linienstroms aufgrund des dann schwächeren Umgebungsfeldes größere Höhen erreichen kann. Die für die Eruption der Flußröhre (d. h. für ihren Aufstieg bis auf mehrere Sonnenradien) notwendige Verringerung des Linienstroms führt jedoch an der Oberfläche der Flußröhre auf eine unrealistisch hohe Zahl von Windungen der Feldlinien um die Flußröhrenachse (siehe Roussev et al. [26] für den Grenzfall unendlich vieler Windungen bei $I_0 = 0$).²⁵

²⁴Es bleibt noch zu untersuchen, wie weit die Verdrillung im weiteren Verlauf der Entwicklung abnimmt. Es ist eine interessante Frage, ob die Verdrillung bis auf Null zurückgeht oder vielleicht lediglich bis auf einen Wert knapp unterhalb des Schwellwertes der Kink-Instabilität. Die Messung der Verdrillung zu späteren Zeiten der Entwicklung ist jedoch schwierig (u. a. wegen der auftretenden magnetischen Rekonnexion) und konnte zum Zeitpunkt der Fertigstellung dieser Arbeit noch nicht durchgeführt werden.

²⁵Der Linienstrom kann aus dem TD-Gleichgewicht entfernt werden, da laut Gl. (13) in Titov & Démoulin [74] auch für $I_0 = 0$ innerhalb des Torus die Kraftfreiheit erfüllt ist.

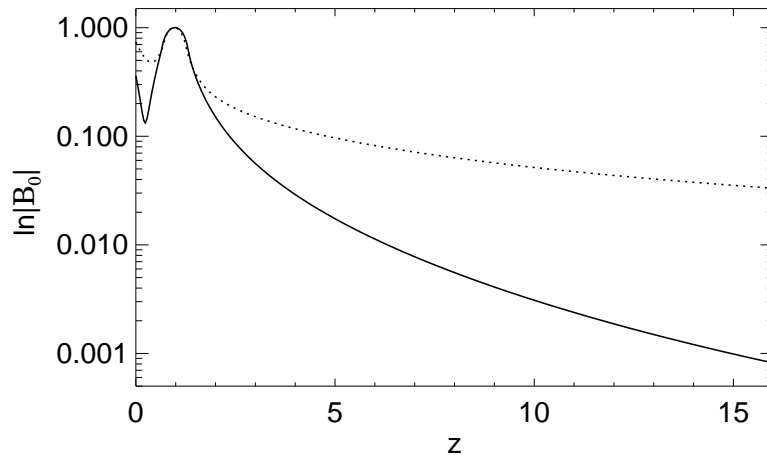


Abbildung 45: Anfänglicher Verlauf der Magnetfeldstärke entlang der z -Achse im TD-Gleichgewicht. *Gepunktete Linie*: Ursprüngliches Gleichgewicht mit Linienstrom I_0 . Gezeigt ist die in Abschn. 4.3 beschriebene Konfiguration mit $\Phi_{\text{loop}} = 4.9\pi$. Es gilt $|\mathbf{B}_0| \propto z^{-1}$. *Durchgezogene Linie*: Modifiziertes Gleichgewicht, in dem der Linienstrom durch zwei vertikal gerichtete subphotosphärische Dipole ersetzt wurde. In dieser Konfiguration ist ebenfalls $\Phi_{\text{loop}} = 4.9\pi$, aber nun gilt $|\mathbf{B}_0| \propto z^{-3} \dots z^{-4}$.

In diesem Abschnitt wird eine Modifikation des TD-Gleichgewichts vorgestellt, die die Eruption der Flußröhre ermöglicht und gleichzeitig die Problematik der hohen Anzahl von Windungen umgeht. Da an dieser Modifikation zum Zeitpunkt der Fertigstellung dieser Arbeit noch gearbeitet wurde, soll hier auf die sehr umfangreichen Einzelheiten nicht eingegangen werden. Die ersten Ergebnisse sollen jedoch dargestellt werden, da sie einen weiteren wichtigen Schritt auf dem Wege zur vollständigen Modellierung solarer Eruptionen darstellen.

Die hier durchgeführte Modifikation des TD-Gleichgewichts besteht darin, das vom Linienstrom I_0 erzeugte Magnetfeld durch das in Kapitel 3 verwendete, von zwei vertikalen Dipolen erzeugte Potentialfeld (Gln. (3.41) und (3.42)) zu ersetzen. Letzteres kommt einer realistischen Modellierung des koronalen Magnetfeldes über aktiven Regionen näher als das vom Linienstrom erzeugte Feld (siehe z. B. [65] für eine Abschätzung des Verlaufs der Magnetfeldstärke in der Korona). In dem so erhaltenen annähernd kraftfreien Gleichgewicht kann die Stärke der Verdrillung des Systems durch Variation des Betrags der Dipolmomente gesteuert werden. Für unterkritische Verdrillungen relaxiert das System in ein stabiles numerisch Gleichgewicht, so daß es als Anfangskonfiguration numerischer Simulationen verwendet werden kann.

In der im folgenden beschriebenen Simulation werden die Parameter des Systems so gewählt, daß sich wie in der in Abb. 34 gezeigten Simulation $\Phi_{\text{loop}} = 4.9\pi$ ergibt. Die Anzahl der Windungen der Feldlinien an der Oberfläche der Flußröhre beträgt $N_{\text{cor}} = 8.75$

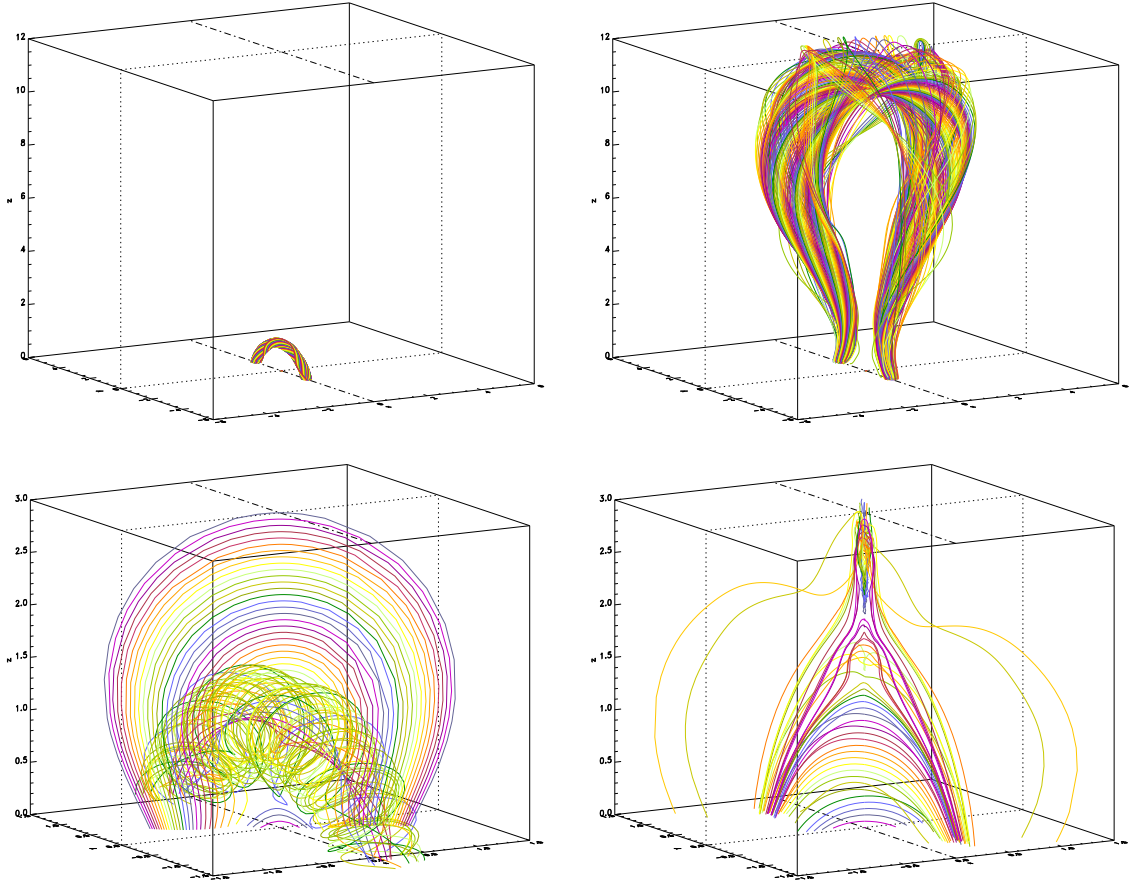


Abbildung 46: *Oben*: Magnetische Feldlinien der kink-instabilen Flußröhre in der Simulation des modifizierten TD-Gleichgewichts zu den Zeitpunkten $t = 0$ (*links*) und $t = 36$ (*rechts*) im Volumen $|x| \leq 6$, $|y| \leq 6$, $0 \leq z \leq 12$. *Unten*: Magnetische Feldlinien, die die z -Achse durchlaufen, zu den Zeitpunkten $t = 0$ (*links*) und $t = 94$ (*rechts*) in derselben Simulation im Volumen $|x| \leq 1.5$, $|y| \leq 1.5$, $0 \leq z \leq 3$.

($N_t = 25$) und ist somit mit der Anzahl der in Abb. 34 gezeigten Simulation ($N_{\text{cor}} = 5.25$) vergleichbar. Nun jedoch fällt das Umgebungsfeld der Flußröhre deutlich schneller mit der Höhe ab (Abb. 45).

Die Simulation wird mit einer nach oben gerichteten Anfangsstörung ($u_1 = 0.05, t_1 = 5$) gestartet. Die numerischen Details sind weitestgehend identisch mit den in Abschn. 4.3 beschriebenen Simulationen. Es wird lediglich eine größere Simulationsbox ($L_x = L_y = 16$, $L_z = 32$) verwendet sowie die künstliche Diffusion im unteren Bereich der Box erhöht, um die Entwicklung des Systems hinreichend lange verfolgen zu können.²⁶ Des weiteren wird hier wie in Abschn. 5.2 die anfängliche Dichteverteilung $\rho_0 = |\mathbf{B}_0|^{3/2}$ vorgeschrieben

²⁶ $1 - \sigma_{\mathbf{u}}$ und $1 - \sigma(\cdot)$ fallen im Bereich $(x, y, 0 \leq z \leq 3)$ von 0.05 in der Ebene $\{z = 0\}$ exponentiell auf 0.005 in $\{z = 3\}$ ab und sind im Rest der Box konstant 0.005.

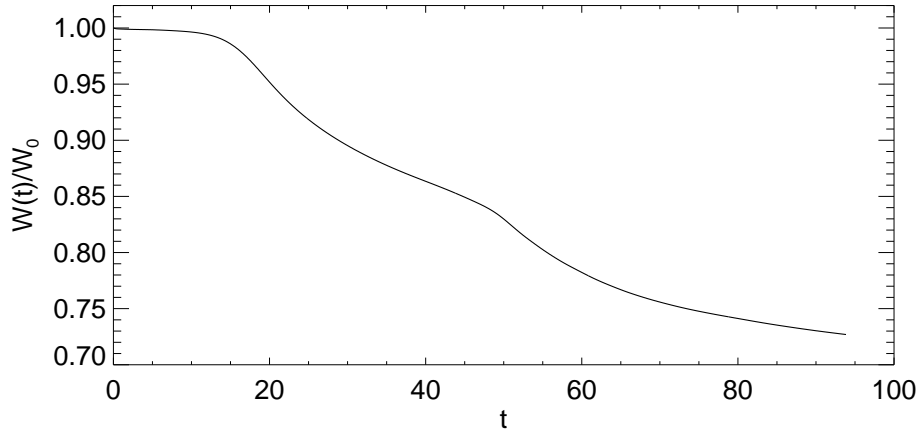


Abbildung 47: Entwicklung der „relativen magnetische Energie“ in der Simulation des modifizierten TD-Gleichgewichts. Der Knick bei $t \approx 50$ ist auf das Einsetzen der starken magnetischen Rekonnexion in der vertikalen Stromschicht zurückzuführen.

und eine Abnahme der Plasmadichten auf unter 10 Prozent ihrer anfänglichen Werte unterbunden.

Die kink-instabile Flußröhre steigt in der Simulation auf, wobei sie ein Vielfaches ihrer Anfangshöhe erreicht (Abb. 46 oben). Analog zu der in Abb. 34 gezeigten Simulation bildet sich im Verlauf des Aufstiegs unterhalb der Röhre eine (hier deutlich ausgedehntere) vertikale Stromschicht aus, in der während der späteren Phase der Simulation ($t \gtrsim 50$) starke magnetische Rekonnexion stattfindet. Diese führt unterhalb der Stromschicht zur Bildung neuer Feldlinien, die die Form von „Post-Flare-Loops“ (siehe Abschn. 1.1), insbesondere die in SXR oft beobachtete, nach oben spitz zulaufende „Cusp-Struktur“, verblüffend genau nachzeichnen (Abb. 46 unten). Allerdings führt die magnetische Rekonnexion in dieser Phase der Simulation in den unteren Abschnitten der Flußröhre zu einer „Abschnürung“ der Flußröhre von ihren Fußpunktregionen, die so von den Beobachtungen nicht nahegelegt wird, jedoch auch nicht zwingend ausgeschlossen werden kann. Es ist zu erwarten, daß die geplante STEREO-Mission in dieser Frage neue Erkenntnisse bringen wird.

Während des anfänglichen, exponentiell verlaufenden Aufstiegs der Flußröhre nimmt die magnetische Energie des Systems um ca. 9 Prozent ab, was einer freigesetzten Energie von ca. $7 \times 10^{26} J$ entspricht. Es wird also die nach den Vorstellungen der „Storage and Release“-Modelle für große solare Eruptionen notwendige Energie von $\sim 10^{25} J$ in der Simulation bereits in der exponentiellen Aufstiegsphase in ausreichendem Maße bereitgestellt. Die gesamte Abnahme der magnetischen Energie in der Simulation beträgt ca. 27 Prozent (ca. $2 \times 10^{27} J$) (Abb. 47).

In Abb. 48 ist die Aufstiegscharakteristik der Flußröhre zusammen mit der bislang am detailliertesten beobachteten Aufstiegscharakteristik einer solaren Eruption vom 21.4.2002 (Gallagher et al. [6]) dargestellt. Am Ende des gezeigten Zeitintervalls ist die Flußröhre noch mit ihren Fußpunkten verbunden und hat eine Höhe von ca. $1.5 R_{\odot}$ erreicht. Der

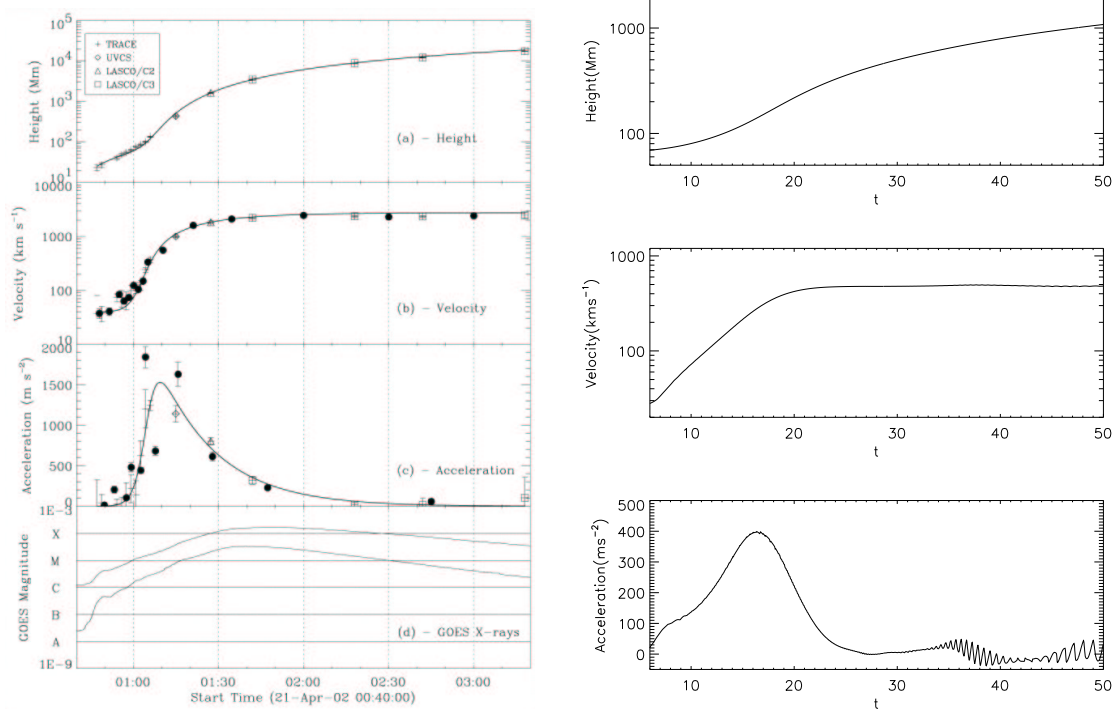


Abbildung 48: *Links*: Aufstiegscharakteristik der solaren Eruption am 21.4.2002 (projizierte Höhe, Geschwindigkeit, Beschleunigung und weicher Röntgenfluß). Die Abbildung wurde Gallagher et al. [6] entnommen. *Rechts*: Höhe, Geschwindigkeit und Beschleunigung der kink-instabilen Flußröhre des modifizierten TD-Gleichgewichts (für die Umskalierung der Simulationswerte wurden eine Anfangshöhe der Flußröhre von $60 Mm$ und eine maximale koronale Alféngeschwindigkeit von $1000 km/s$ angenommen; $\tau_a = 60 s$). Die unterste Kurve wurde mit der Standard-IDL-Prozedur „smooth“ geglättet.

Höhen-Zeit-Verlauf in der Simulation entspricht qualitativ genau der Beobachtung: anfänglich exponentielle, dann lineare Höhenzunahme. In der anfänglichen Phase dieses Ereignisses konnten mit Hilfe von TRACE helisch verformte Plasmaloops beobachtet werden [B. Kliem, persönliche Kommunikation]. Beides deutet darauf hin, daß die solare Eruption vom 21.4.2002 durch die Kink-Instabilität verdrillter magnetischer Flußröhren ausgelöst wurde.

Dies gestattet Rückschlüsse auf die bislang unbekanntenen Beschleunigungsmechanismen von CMEs. Gegenwärtig liegen lediglich drei Beobachtungen der Aufstiegscharakteristik von CMEs vor, die über ausreichend viele Datenpunkte verfügen, um diesen einen funktionalen Verlauf anpassen zu können [6, 89, 90]. Daher werden in der Literatur unterschiedliche Beschleunigungsmodelle diskutiert. Der in dieser Arbeit gefundene Auslösungsmechanismus solarer Eruptionen durch die Kink-Instabilität verdrillter koronaler magnetischer Flußröhren impliziert eine anfänglich exponentielle Beschleunigung von CMEs.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden die Auslösungsmechanismen und die dynamische Entwicklung großskaliger solarer Eruptionen mittels dreidimensionaler numerischer Simulationen im Rahmen der idealen MHD untersucht. Es wurde der Ansatz verfolgt, daß eine ideale MHD-Instabilität verdrillter kraftfreier koronaler magnetischer Flußröhren solare Eruptionen auslösen und antreiben kann. Dabei lag das Hauptaugenmerk auf der Kink-Instabilität bogenförmiger Flußröhren. Es wurden zwei unterschiedliche Modelle betrachtet:

1. Ein zu Beginn stromfreies System, in dem die verdrillte Flußröhre durch vorgegebene Wirbel an ihren photosphärischen Fußpunkten numerisch konstruiert und in den Bereich der Instabilität getrieben wird.
2. Ein System, das bereits zu Beginn der Simulation eine stromführende verdrillte Flußröhre enthält, wobei die Verdrillung weitgehend frei gewählt werden kann. Hierbei wurde auf das von Titov & Démoulin [74] entwickelte Modell einer kraftfreien koronalen Flußröhre zurückgegriffen.

Die Simulationen des erstgenannten Systems führten auf folgende Ergebnisse:

- Die Flußröhre durchläuft bei kontinuierlicher Verdrillung eine Folge kraftfreier Gleichgewichtszustände mit zunehmender freier Energie.
- Oberhalb einer kritischen Verdrillung von $(2.5 - 2.75)\pi$ kann kein Gleichgewicht mehr gefunden werden und die Flußröhre steigt auf das über Fünzigfache ihrer Anfangshöhe auf, was skaliert ca. drei Sonnenradien über der Photosphäre entspricht.
- Die während des Aufstiegs anwachsende helische Verformung der Flußröhre weist deutlich auf die Kink-Instabilität hin.

Es wurde durch eine systematische Studie erstmalig für ein solches System gezeigt, daß die erhaltenen Ergebnisse für einen weiten Bereich verschiedener für das System charakteristischer physikalischer Parameter gültig sind. Ferner wurde die auftretende Instabilität zum ersten Mal mit der Kink-Instabilität in Verbindung gebracht. Das Modell reproduziert den in solaren Eruptionen beobachteten Ausstoß von Plasma aus der Sonnenkorona und die damit verbundene großskalige Öffnung magnetischer Feldlinien in den interplanetaren Raum. Dennoch kann es aus den folgenden Gründen lediglich als ein Schritt auf dem Wege zu einer umfassenden Erklärung solarer Eruptionen angesehen werden.

- Die gefundene kritische Verdrillung kann selbst durch die stärksten bislang beobachteten photosphärischen Wirbelbewegungen nicht erreicht werden.
- Die in großen solaren Eruptionen sehr häufig beobachtbare ausbrechende Protuberanz ist im Modell nicht enthalten.
- Die für solare Eruptionen notwendige Freisetzung freier magnetischer Energie konnte nicht in ausreichendem Umfang erhalten werden.

Das der Beobachtung aktiver Regionen besser angepaßte Modell von Titov und Démoulin ermöglichte weiterführende Untersuchungen. In diesem Modell konnte die Kink-Instabilität oberhalb einer von den geometrischen Parametern des Modells abhängigen kritischen Verdrillung zweifelsfrei nachgewiesen werden. Es wurde erstmalig eine systematische Untersuchung der Kink-Instabilität in bogenförmiger Flußröhren unter Berücksichtigung der photosphärischen Fußpunktverankerung durchgeführt. In Simulationen der Instabilität konnten eine Reihe essentieller Bestandteile solarer Eruptionen in überzeugender Weise reproduziert werden:

- Bei geeigneter Anfangsstörung steigt die kink-instabile Flußröhre in der Simulation auf. Unterhalb der aufsteigenden Flußröhre bildet sich eine vertikale Stromschicht aus, die dem zentralen Element des „Standardmodells“ der Hauptphase solarer Eruptionen entspricht.
- Die diese Stromschicht durchlaufenden Gruppen magnetischer Feldlinien stimmen in ihrer Ausrichtung und in ihrer Form mit der Beobachtung transienter Sigmoiden überein, während die aufsteigende Flußröhre eine den Sigmoiden entgegengesetzte Ausrichtung aufweist. Damit wurde zum einen gezeigt, daß transiente Sigmoiden nicht, wie bislang überwiegend angenommen, kink-instabile ausbrechende Flußröhren darstellen und zum anderen ein neues Modell transienter Sigmoiden vorgelegt.
- Die helische Verformung und Aufstiegscharakteristik zweier instabiler Protuberanzen sowie die zeitliche Entwicklung der Verdrillung in einem der Fälle wurde in exzellenter Übereinstimmung mit Hilfe der Simulationen reproduziert. Beide Ereignisse konnten dadurch zweifelsfrei auf die Kink-Instabilität zurückgeführt werden.
- Nach einer Modifikation des Modells konnte die zuvor durch das starke Umgebungsfeld des Titov-Démoulin-Gleichgewichts verhinderte vollständige Eruption der Flußröhre erzielt werden. Die während dieser Simulation freigesetzte magnetische Energie entspricht den Vorstellungen der „Storage and Release“-Modelle solarer Eruptionen. Die Aufstiegscharakteristik der Flußröhre wurde mit der bislang am detailliertesten beobachteten Aufstiegscharakteristik eines CME verglichen, wobei sich eine ausgezeichnete qualitative Übereinstimmung fand. In dieser Simulation konnte des Weiteren die Entstehung von Post-Flare-Loops qualitativ (d. h. im Feldlinienbild) beobachtet werden.

Die erzielten Ergebnisse belegen in überzeugender Weise, daß die Kink-Instabilität verdrillter koronaler magnetischer Flußröhren viele großskalige solare Eruptionen auslöst und antreibt.

Es werden jedoch auch ausbrechende Protuberanzen beobachtet, die (zumindest in der Projektion auf die Himmelsebene) keine Anzeichen der für die Kink-Instabilität charakteristischen helischen Verformung tragen. Solche Protuberanzen scheinen vielmehr einfach zu expandieren und dabei aufzusteigen. Ereignisse dieser Art können aller Wahrscheinlichkeit nach mit der in dieser Arbeit nicht untersuchten Torus-Instabilität erklärt wer-

den. Es ist zu erwarten, daß die Auslösung und anfängliche Entwicklung *sämtlicher* großskaliger solarer Eruptionen mit Hilfe der Kink-Instabilität und der Torusinstabilität einer verdrillten Flußröhre erklärt werden kann.

Auf dem Wege zu einem *vollständigen* Modell solarer Eruption erscheinen für die nächste Zukunft die folgenden Schritte sinnvoll:

- Quantifizierung der Rolle der Kink-Instabilität und der Torus-Instabilität und eines eventuell vorhandenen Zusammenspiels dieser beiden Instabilitäten bei der Auslösung solarer Eruptionen.
- Einbeziehung des thermischen Drucks und der Gravitation in die Simulationen, um die Aufstiegscharakteristik der instabilen Flußröhre auch quantitativ mit der Aufstiegscharakteristik von CMEs vergleichen zu können. Dieser Schritt ist auch für die Aufstellung der Energiebilanz solarer Eruptionen notwendig.
- Einbeziehung magnetischer Resistivität in die Simulationen, um die auf magnetische Rekonnexion beruhenden Prozesse in der Hauptphase solarer Eruptionen, wie z. B. die Bildung von Post-Flare-Loops, sowie die Plasmaheizung und Teilchenbeschleunigung in solaren Eruptionen besser studieren zu können.
- Untersuchung der Entstehung der instabilen Flußröhre. Es ist noch nicht verstanden, welcher Prozeß („Tether Cutting“, Aufsteigen verdrillten Flusses aus der Konvektionszone, photosphärische Strömungen, ...) maßgeblich zur Erzeugung MHD-instabiler Flußsysteme beiträgt.
- Einbeziehung der Wechselwirkung der Flußröhre mit dem Umgebungsfeld. Es ist noch nicht klar, ob eine einzelne instabile Flußröhre überhaupt ein im Grundsatz vollständiges Modell für solare Eruptionen darstellen kann. Die oftmals beobachtete Dreifachstruktur von CMEs deutet an, daß die Wechselwirkung der instabilen Flußröhre mit dem Umgebungsfeld einen wesentlichen Bestandteil des Gesamtprozesses bildet.

A Numerisches Verfahren

A.1 Festlegung des nicht-äquidistanten Gitters

Die Simulationen dieser Arbeit erfordern einerseits eine möglichst gute räumliche Gitterauflösung, um relativ kleinskalige Prozesse wie z.B. die Bildung von Stromschichten studieren zu können, andererseits aber auch möglichst große Simulationsboxen, um das Aufsteigen des magnetischen Flußsystems hinreichend lange verfolgen zu können. Deshalb wird ein Simulationsgitter mit räumlich veränderlicher Auflösung verwendet. Im folgenden sei die Festlegung des Simulationsgitters am Beispiel der positiven x-Koordinatenachse erläutert. Die Festlegung der restlichen Koordinatenachsen erfolgt in analoger Weise.

In dem zur numerischen Integration herangezogenen Lax-Wendroff-Verfahren (Anhang A.3) sind Differenzenquotienten lediglich für äquidistante Gitterpunktstände definiert. Es sei ein (eindimensionales) äquidistantes Gitter mit N Gitterpunkten $i = 1, 2, \dots, N$ und Gitterpunktstand Δw gegeben, wobei die Gitterpunkte $1, 2, N-1$ und N für die Formulierung der Randbedingungen verwendet werden. Die Stützstellen des Gitters lauten dann $w_i = \Delta w(i - 3)$. Um Differentialquotienten $\partial f(x)/\partial x$ auch auf einem Gitter mit nicht-äquidistanten Stützstellen x_i mittels Differenzenquotientenbildung diskretisieren zu können, muß eine eindeutige Funktion $w(x)$ mit $F(w(x)) = f(x)$ existieren, so daß gilt:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial F(w(x))}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial w} \frac{dw}{dx}.$$

Setzt man $dw/dx = 1/(dx/dw)$ und approximiert $\partial F/\partial w$ durch die bekannte Differenzenquotientenbildung auf dem äquidistanten Gitter, so müssen weder $F(w)$ noch $w(x)$ explizit bekannt sein. Es gilt dann auf dem nicht-äquidistanten Gitter:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x(i)} \approx \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2 \Delta w} \frac{1}{[dx/dw]_{x=x(i)}} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \Delta w} \frac{1}{[dx/dw]_{x=x(i)}}.$$

Nun muß noch eine geeignete Funktion $x(w)$ gewählt werden. In dieser Arbeit wird

$$x(w) = w + a_1 \{ \exp (b [w - w(s)]^2) - 1 \} + a_2 \{ \exp (b [w - w(s)]^C) - 1 \} \quad (1.52)$$

verwendet, wobei $w(s)$ eingeführt wird, um die Konstruktion eines zentralen äquidistanten Gitterbereiches mit $x(i) = w(i)$ für $i \leq s$ zu ermöglichen. Die gewählte Funktion enthält drei freie Parameter a_1 , a_2 und b und gestattet somit eine hohe Flexibilität in der Wahl der Gittergröße $L_x = x(w(N - 2))$, des Verhältnisses des kleinsten nicht-äquidistanten Gitterpunktstandes zum äquidistanten Gitterpunktstand $(x(w(s+1)) - x(w(s)))/\Delta w$ und des maximalen Gitterabstandes $\Delta x_{\max} = x(w(N - 2)) - x(w(N - 3))$. Durch Einsetzen dieser drei Bedingungen in Gl. (1.52) erhält man ein Gleichungssystem für a_1 , a_2 und b , das numerisch gelöst werden kann. Der Exponent C dient der Feinabstimmung. In dieser Arbeit werden Werte $2 < C \lesssim 4$ verwendet.

A.2 Flußerhaltende Form der Bewegungsgleichungen

Das numerisch zu integrierende Gleichungssystem (2.16)–(2.19) hat unter Einbeziehung der Viskosität (Gl.(2.13)) und nach geeignet gewählter Normierung (siehe Abschn. 3.2 bzw. 4.2) in der flußerhaltenden Form (Gl. (3.47)) die folgende dimensionslose Komponentendarstellung:

$$\partial_t \rho = -\partial_x(\rho u_x) - \partial_y(\rho u_y) - \partial_z(\rho u_z), \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho u_x) &= -\partial_x(\rho u_x^2 + \frac{1}{2}(p - B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - \frac{2}{3}\rho\nu(2\partial_x u_x - \partial_y u_y - \partial_z u_z)) \\ &\quad -\partial_y(\rho u_x u_y - B_x B_y - \rho\nu(\partial_y u_x + \partial_x u_y)) \\ &\quad -\partial_z(\rho u_x u_z - B_x B_z - \rho\nu(\partial_z u_x + \partial_x u_z)), \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho u_y) &= -\partial_x(\rho u_x u_y - B_x B_y - \rho\nu(\partial_x u_y + \partial_y u_x)) \\ &\quad -\partial_y(\rho u_y^2 + \frac{1}{2}(p + B_x^2 - B_y^2 + B_z^2) - \frac{2}{3}\rho\nu(2\partial_y u_y - \partial_x u_x - \partial_z u_z)) \\ &\quad -\partial_z(\rho u_z u_y - B_z B_y - \rho\nu(\partial_z u_y + \partial_y u_z)), \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho u_z) &= -\partial_x(\rho u_x u_z - B_x B_z - \rho\nu(\partial_x u_z + \partial_z u_x)) \\ &\quad -\partial_y(\rho u_y u_z - B_y B_z - \rho\nu(\partial_y u_z + \partial_z u_y)) \\ &\quad -\partial_z(\rho u_z^2 + \frac{1}{2}(p + B_x^2 + B_y^2 - B_z^2) - \frac{2}{3}\rho\nu(2\partial_z u_z - \partial_x u_x - \partial_y u_y)), \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\partial_t B_x = -\partial_y(u_y B_x - u_x B_y) - \partial_z(u_z B_x - u_x B_z), \quad (1.57)$$

$$\partial_t B_y = -\partial_x(u_x B_y - u_y B_x) - \partial_z(u_z B_y - u_y B_z), \quad (1.58)$$

$$\partial_t B_z = -\partial_x(u_x B_z - u_z B_x) - \partial_y(u_y B_z - u_z B_y), \quad (1.59)$$

$$\partial_t U = -\partial_x S_x - \partial_y S_y - \partial_z S_z, \quad (1.60)$$

wobei

$$\begin{aligned} U &= \frac{p}{\gamma - 1} + \rho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2, \\ S_x &= \frac{\gamma p u_x}{\gamma - 1} + \rho u_x(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + 2(u_x B_y^2 + u_x B_z^2 - u_y B_x B_y - \\ &\quad u_z B_x B_z), \\ S_y &= \frac{\gamma p u_y}{\gamma - 1} + \rho u_y(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + 2(u_y B_x^2 + u_y B_z^2 - u_x B_x B_y - \\ &\quad u_z B_y B_z), \\ S_z &= \frac{\gamma p u_z}{\gamma - 1} + \rho u_z(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + 2(u_z B_x^2 + u_z B_y^2 - u_x B_x B_z - \\ &\quad u_y B_y B_z), \\ j_x &= \partial_y B_z - \partial_z B_y, \\ j_y &= \partial_z B_x - \partial_x B_z, \\ j_z &= \partial_x B_y - \partial_y B_x \end{aligned}$$

gilt. Im Grenzfall $\beta = 0$ entfallen die Druckterme in den Gln. (1.54)–(1.56) sowie die Energiegleichung Gl. (1.60).

Die flußerhaltende Form gewährleistet die Erhaltung der Divergenz des Magnetfeldes. Es gilt unter Verwendung der Gln. (1.57)–(1.59):

$$\begin{aligned}
\partial_t(\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) &= \partial_x \partial_t B_x + \partial_y \partial_t B_y + \partial_z \partial_t B_z \\
&\quad - \partial_x \partial_y (u_y B_x - u_x B_y) - \partial_x \partial_z (u_z B_x - u_x B_z) \\
&\quad - \partial_y \partial_x (u_x B_y - u_y B_x) - \partial_y \partial_z (u_z B_y - u_y B_z) \\
&\quad - \partial_z \partial_x (u_x B_z - u_z B_x) - \partial_z \partial_y (u_y B_z - u_z B_y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ist also zu Beginn $\nabla \cdot \mathbf{BD} = 0$, so ist die Divergenzfreiheit während der gesamten Integration erfüllt. In den in dieser Arbeit betrachteten Konfigurationen ist die räumliche Variation des Magnetfeldes, insbesondere in den Gebieten hoher Feldstärken, sehr groß, so daß in der Diskretisierung $\nabla \cdot \mathbf{BD} = 0$ in diesen Gebieten nicht exakt erfüllt ist. Während der Transformation der Induktionsgleichung (2.18) in die flußerhaltende Form (1.54)–(1.56) wird jedoch bei der Darstellung der Lorentzkraftdichte durch die Komponenten des Magnetfeldes dessen Divergenzfreiheit vorausgesetzt. Deshalb wird in dieser Arbeit die Lorentzkraftdichte als Quellterm beibehalten. Diese Modifikation führt auf die folgende Form der Bewegungsgleichungen (1.54)–(1.56):

$$\begin{aligned}
\partial_t(\rho u_x - j_y B_z + j_z B_y) &= -\partial_x(\rho u_x^2 - \frac{2}{3}\rho\nu(2\partial_x u_x - \partial_y u_y - \partial_z u_z)) \\
&\quad - \partial_y(\rho u_x u_y - \rho\nu(\partial_y u_x + \partial_x u_y)) \\
&\quad - \partial_z(\rho u_x u_z - \rho\nu(\partial_z u_x + \partial_x u_z)), \\
\partial_t(\rho u_y - j_z B_x + j_x B_z) &= -\partial_x(\rho u_x u_y - \rho\nu(\partial_x u_y + \partial_y u_x)) \\
&\quad - \partial_y(\rho u_y^2 - \frac{2}{3}\rho\nu(2\partial_y u_y - \partial_x u_x - \partial_z u_z)) \\
&\quad - \partial_z(\rho u_z u_y - \rho\nu(\partial_z u_y + \partial_y u_z)), \\
\partial_t(\rho u_z - j_x B_y + j_y B_x) &= -\partial_x(\rho u_x u_z - \rho\nu(\partial_x u_z + \partial_z u_x)) \\
&\quad - \partial_y(\rho u_y u_z - \rho\nu(\partial_y u_z + \partial_z u_y)) \\
&\quad - \partial_z(\rho u_z^2 - \frac{2}{3}\rho\nu(2\partial_z u_z - \partial_x u_x - \partial_y u_y)).
\end{aligned}$$

Diese Modifikation verletzt zwar die Flußerhaltung, verbessert jedoch entscheidend die Approximation der Lorentzkraftdichte. Die Verletzung der Flußerhaltung ist zu vertreten, solange die auftretenden Quellterme als klein angesehen werden können [91]. Dies ist in den in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen stets der Fall. Testrechnungen, in denen die beiden obigen Formulierungen der Bewegungsgleichungen miteinander verglichen wurden, führten auf nahezu übereinstimmende dynamische Entwicklungen des Systems. Das Relaxationsverhalten des Systems hingegen wurde durch die Darstellung der Lorentzkraftdichten als Quellterme deutlich verbessert.

A.3 Lax-Wendroff-Verfahren

Das Lax-Wendroff-Verfahren ist ein explizites numerisches Zweischrittverfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit. Es zählt zur Gruppe der finiten Differenzenverfahren. Das Verfahren wird, ausgehend von Gl.(3.47), mit Hilfe einer zeitlichen Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung des Variablenvektors \mathbf{U} , bei der die zeitlichen Ableitungen von \mathbf{U} durch die räumlichen Ableitungen der Flußterme \mathbf{F} , \mathbf{G} und \mathbf{H} ersetzt werden, hergeleitet [92]. Eine einzelne Iteration des Verfahrens besteht aus einem Hilfsschritt, der Hilfswerte der Integrationsvariablen zum Zeitpunkt $t = (2n + 1)\Delta t$ aus den Werten zum Zeitpunkt $t = 2n\Delta t$ bestimmt:

$$\begin{aligned}
 U_{i,j,k}^{n+1} &= \frac{1}{6} (U_{i+1,j,k}^n + U_{i-1,j,k}^n + U_{i,j+1,k}^n + U_{i,j-1,k}^n \\
 &\quad + U_{i,j,k+1}^n + U_{i,j,k-1}^n) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1,j,k}^n - F_{i-1,j,k}^n) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (G_{i,j+1,k}^n - G_{i,j-1,k}^n) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta z} (H_{i,j,k+1}^n - H_{i,j,k-1}^n) , \tag{1.61}
 \end{aligned}$$

und aus einem Hauptschritt, der die physikalischen Werte zum Zeitpunkt $t = (2n + 2)\Delta t$ berechnet:

$$\begin{aligned}
 U_{i,j,k}^{n+2} &= U_{i,j,k}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1,j,k}^{n+1} - F_{i-1,j,k}^{n+1}) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{i,j+1,k}^{n+1} - G_{i,j-1,k}^{n+1}) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta z} (H_{i,j,k+1}^{n+1} - H_{i,j,k-1}^{n+1}) . \tag{1.62}
 \end{aligned}$$

Die im ersten Term auf der rechten Seite von Gl.(1.61) durchgeführte Mittelung führt dazu, daß die effektiven räumlichen Ableitungen erster Ordnung am Gitterpunkt (i, j, k) durch Mittelung über die räumlichen Ableitungen an den sechs Nachbarpunkten $(i-1, j, k)$, $(i+1, j, k)$, $(i, j-1, k)$, $(i, j+1, k)$, $(i, j, k-1)$ und $(i, j, k+1)$ berechnet werden. Dies erhöht die numerische Diffusion und dadurch die Stabilität des Verfahrens, ist jedoch von Nachteil, wenn die zu integrierenden Größen eine hohe räumliche Variation aufweisen, wie z. B. die Komponenten des Magnetfeldes in den hier untersuchten Konfigurationen in den Bereichen hoher Feldstärken. Deshalb wird in dieser Arbeit der Mittelungsterm

$$\frac{1}{6} (U_{i-1,j,k}^n + U_{i+1,j,k}^n + U_{i,j-1,k}^n + U_{i,j+1,k}^n + U_{i,j,k-1}^n + U_{i,j,k+1}^n)$$

in Gl.(1.61) durch $U_{i,j,k}^n$ ersetzt. Mit dieser Modifikation werden nun die effektiven räumlichen Ableitungen direkt an den Gitterpunkten berechnet, was sowohl die numerische Diffusion als auch die Diskretisierungsfehler bei der Berechnung der Stromdichten verringert.

Testrechnungen der beiden Versionen des Verfahrens wurden durchgeführt und führten auf eine nahezu identische dynamische Entwicklung des Systems. Die Relaxationseigenschaften des Systems hingegen werden durch die beschriebene Modifikation deutlich verbessert (vergl. mit der in Anhang A.2 beschriebenen Modifikation der flußerhaltenden Form).

A.4 Wahl des Zeitschrittes

In den Simulationen dieser Arbeit wird ein variabler Zeitschritt $\Delta t(t)$ verwendet. Es muß zu jedem Zeitpunkt, auf jedem Gitterpunkt und für alle Raumrichtungen i das Courant-Friedrichs-Levy-Kriterium erfüllt sein:

$$\Delta t < \frac{\Delta_i}{|u_i| + v_f}.$$

Hierbei stehen Δ_i für die Gitterpunktabstände Δx , Δy , Δz und u_i für die Strömungsgeschwindigkeit entlang der Raumrichtung i und es ist v_f die Geschwindigkeit der schnellen charakteristischen Mode des idealen hyperbolischen Systems (siehe z. B. [91]). In dieser Arbeit wird $v_f = v_{a_{\max}}(t = 0) = 1$ gesetzt. Die Wahl des Zeitschritts wird des weiteren von der gewählten kinematischen Viskosität ν eingeschränkt. Es muß analog zu oben zu jedem Zeitpunkt, auf jedem Gitterpunkt und für alle Raumrichtungen i

$$\Delta t < \frac{\Delta_i^2}{\nu}$$

erfüllt sein [91]. Welche der beiden obigen Bedingungen restriktiver ist, hängt von der gewählten Gitterauflösung und Viskosität ab. Der anfängliche Zeitschritt $\Delta t(0)$ läßt sich abschätzen, indem man in das Courant-Friedrichs-Levy-Kriterium $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ einsetzt.

A.5 Randbedingungen

Die in dieser Arbeit am oberen Rand und an den seitlichen Rändern der Simulationsbox verwendeten festen Randbedingungen werden implementiert, indem an diesen Rändern $\rho = \rho_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ gesetzt wird. Zusätzlich wird in der ersten Gitterebene innerhalb dieser Ränder zu jedem Zeitschritt $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ vorgeschrieben.

Die der z -Liniensymmetrie der betrachteten Systeme entsprechende Spiegelung der Integrationsvariablen in der Ebene $\{y = 0\}$ wird wie folgt implementiert:

$$\begin{aligned} \rho(x, -y, z) &= \rho(-x, y, z) \\ B_x(x, -y, z) &= B_x(-x, y, z) \\ B_y(x, -y, z) &= B_y(-x, y, z) \\ B_z(x, -y, z) &= -B_z(-x, y, z) \\ u_x(x, -y, z) &= -u_x(-x, y, z) \\ u_y(x, -y, z) &= -u_y(-x, y, z) \\ u_z(x, -y, z) &= u_z(-x, y, z) \end{aligned}$$

Am unteren Rand der Simulationsbox werden die Tangentialkomponenten $B_{x,y}(x, y, -\Delta z)$ des Magnetfeldes zu jedem Zeitschritt durch Extrapolation aus dem Integrationsgebiet erhalten. Hierzu wird zunächst

$$\partial_z B_{x,y}(x, y, 0) \approx \frac{B_{x,y}(x, y, \Delta z) - B_{x,y}(x, y, -\Delta z)}{2 \Delta z}$$

nach $B_{x,y}(x, y, -\Delta z)$ aufgelöst und anschließend der unbekannte Term $\partial_z B_{x,y}(x, y, 0)$ durch numerische Differentiation mit Hilfe eines Interpolationspolynoms dritter Ordnung unter Verwendung der vier Stützstellen $B_{x,y}(x, y, i \Delta z)$, $i = 0, 1, 2, 3$, näherungsweise berechnet (siehe z. B. [94]). Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} B_{x,y}(x, y, -\Delta z) &= \frac{11}{3} B_{x,y}(x, y, 0) - \frac{5}{3} B_{x,y}(x, y, \Delta z) + \frac{9}{3} B_{x,y}(x, y, 2 \Delta z) \\ &\quad - \frac{2}{3} B_{x,y}(x, y, 3 \Delta z). \end{aligned}$$

Die Normalkomponente $B_z(x, y, -\Delta z)$ wird so bestimmt, daß stets $\nabla \cdot \mathbf{B}(z=0) = 0$ gilt. Die Plasmadichte wird zur Erhöhung der numerischen Stabilität in allen Simulationen auf ihrem anfänglichen Wert festgehalten, d. h. es gilt stets $\rho(x, y, -\Delta z) = \rho_0(x, y, -\Delta z)$. Die Tangentialkomponenten $u_{x,y}(x, y, -\Delta z)$ der Strömungsgeschwindigkeit werden in den Simulationen mit aufgeprägter Verdrillung gemäß Gl. (3.45) vorgeschrieben und in den restlichen Simulationen gleich Null gesetzt. Die Normalkomponente $u_z(x, y, -\Delta z)$ ist in allen Simulationen dieser Arbeit stets Null.

A.6 Numerische Diffusion

Die zur Stabilisierung des numerischen Verfahrens verwendete künstliche Diffusion [67] wird wie folgt nach jedem Zeitschritt auf die Integrationsvariablen $\psi = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z)$ (Kapitel 3) bzw. $\psi = (\rho, u_x, u_y, u_z)$ (Kapitel 4 und 5) angewendet.

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,k}^{n+2} &\longrightarrow \sigma \psi_{i,j,k}^{n+2} \\ &+ \frac{(1-\sigma)}{6} (\psi_{i+1,j,k}^{n+2} + \psi_{i-1,j,k}^{n+2} + \psi_{i,j+1,k}^{n+2} + \psi_{i,j-1,k}^{n+2} + \psi_{i,j,k+1}^{n+2} + \psi_{i,j,k-1}^{n+2}). \end{aligned}$$

Um unphysikalische Ströme und Lorentzkräfte zu vermeiden, wird die künstliche Diffusion auf \mathbf{B} nicht angewendet. Ihre Anwendung auf die Plasmadichte läßt sich hingegen aus Stabilitätsgründen nicht vermeiden. Insbesondere die für die anfängliche Dichteverteilung $\rho_0 = B_0^2$ in der sehr großen Simulationsbox des Kapitels 3 auftretenden extrem kleinen Dichten erfordern eine hohe numerische Diffusion in den äußeren Bereichen der Box. Daher wurden sowohl die künstliche Diffusion als auch die kinematische Viskosität ν (siehe Gl. (2.13)) derart implementiert, daß sie räumlich veränderlich vorgeschrieben werden können. In den Simulationen mit kontinuierlicher Verdrillung (Kapitel 3) werden die Parameter $1 - \sigma$ und ν der numerischen Diffusion in einem zentralen Bereich der Box ($\sqrt{x^2 + y^2 + (0.5z)^2} \leq 30$) räumlich konstant gewählt. Außerhalb dieses Gebietes (auf das die Entwicklung der zentralen Flußröhre in allen Simulationen mit kontinuierlicher Verdrillung beschränkt bleibt) steigen ν und $1 - \sigma_\rho$ exponentiell bis zu den äußeren Rändern

der Box an (siehe Tabelle 1 für die Wahl der Parameter der numerischen Diffusion in den Simulationen mit kontinuierlicher Verdrillung).

Die durch die aufgeprägten Wirbelbewegungen am unteren Rand hervorgerufene Verzerrung der Konfiguration erfordert des weiteren eine Erhöhung der künstlichen Diffusion in den untersten Gitterebenen der Simulationsbox. Hierzu werden $1 - \sigma_\rho$ und $1 - \sigma_u$ von $\{z = z_1\}$ bis $\{z = 0\}$ exponentiell ansteigend vorgeschrieben, wobei stets in $\{z = z_1\}$ die jeweiligen Werte des zentralen Bereichs der Box angenommen werden und in $\{z = 0\}$ $1 - \sigma = 0.05$ gilt. Es ist hierbei stets $z_1 = 1.2$ in den Simulationen mit kontinuierlicher Verdrillung und $z_1 = 0.3$ in den Relaxationsrechnungen.

In den Simulationen der Kapitel 4 und 5 kann die numerische Diffusion aufgrund der gegenüber Kapitel 3 deutlich kleineren Boxgrößen im gesamten Simulationsgebiet räumlich konstant gewählt werden (mit Ausnahme der in Abschn. 5.3 beschriebenen Simulation, in der im unteren Bereich der Box eine erhöhte künstliche Diffusion vorgeschrieben wird).

Die Gewährleistung der Stabilität des Lax-Wendroff-Verfahrens erfordert ferner, daß die Viskosität lediglich in den Hauptschritt des Verfahrens einbezogen wird [95].

B Publikationen

Referierte Zeitschriften

- (1) Török, T. , Kliem, B. und Titov, V. S.: *Ideal kink instability of a magnetic loop equilibrium*, Astron. & Astrophys. **413**, L27 (2004).
- (2) Kliem, B., Titov, V. S. und Török, T.: *Formation of current sheets and sigmoidal structure by the kink instability of a magnetic loop*, Astron. & Astrophys. **413**, L23 (2004).
- (3) Török, T. und Kliem, B.: *The evolution of twisting coronal magnetic flux tubes*, Astron. & Astrophys. **406**, 1043 (2003).

Konferenzbeiträge und Institutsserien

- (1) Török, T. und Kliem, B.: *The kink instability of a coronal magnetic loop as a trigger mechanism for solar eruptions*, in “British-Hungarian N+N Workshop for Young Researchers”, Edn. E. Forgács-Dajka, K. Petrovay und R. Erdélyi, Publ. Astron. Dept. Eötvös University, Budapest, Vol. 14, S.165 (2004).
- (2) Török, T. und Kliem, B.: *Twisted coronal magnetic loops and the kink instability in solar eruptions*, in „NIC Symposium 2004“, Edn. D. Wolf, G. Münster und M. Kremer, NIC Series Vol. 20, John von Neumann Institut für Computing (NIC), Forschungszentrum Jülich, S.25 (2003).
- (3) Török, T. und Kliem, B.: *The evolution of coronal magnetic flux tubes twisted by photospheric vortex motions*, in “Solar Variability: From Core to Outer Frontiers”, Ed. A. Wilson, Proc. 10th European Solar Physics Meeting, Prag, ESA SP-506, S. 781 (2002).
- (4) Török, T. und Kliem, B.: *The evolution of coronal magnetic flux tubes under the influence of footpoint twisting motions*, in “Space Plasma Simulation”, Edn. J. Büchner, C.T. Dum und M. Scholer, Proc. ISSS-6, Copernicus Gesellschaft, Katlenburg-Lindau, S. 364 (2001).

Literatur

- [1] B. E. Wood, M. Karovska, J. Chen, et al., *Astrophys. J.* **512**, 484 (1999).
- [2] K. P. Dere, G. E. Brueckner, R. A. Howard, et al., *Astrophys. J.* **516**, 465 (1999).
- [3] C. L. Gerrard und A. W. Hood, *Sol. Phys.* **214**, 151 (2003).
- [4] H. Ji, H. Wang, H. Schmahl, et al., *Astrophys. J.* **595**, L135 (2003).
- [5] P. Romano, L. Contarino und F. Zuccarello, *Sol. Phys.* **214**, 313 (2003).
- [6] P. T. Gallagher, G. R. Lawrence und B. R. Dennis, *Astrophys. J.* **588**, L53 (2003).
- [7] J. Zhang, K. P. Dere, R. A. Howard, et al., *Astrophys. J.* **559**, 452 (2001).
- [8] W. M. Neupert, B. J. Thompson, J. B. Gurman und S. P. Plunkett, *J. Geophys. Res.* **106**, 25,215 (2001).
- [9] D. M. Rust und A. Kumar, *Astrophys. J.* **464**, L199 (1996).
- [10] R. C. Canfield, H. S. Hudson und D. E. McKenzie, *Geophys. Res. Lett.* **26**, 627 (1999).
- [11] A. A. Pevtsov, in *Multi-Wavelength Observations of Coronal Structure and Dynamics – Yokoh 10th Anniversary Meeting*, Edn. P. C. H. Martens und D. Cauffman, Amsterdam, Pergamon, 125 (2002).
- [12] T. G. Forbes, *J. Geophys. Res.* **105**, 23,153 (2000).
- [13] E. R. Priest und T. G. Forbes, *Astron. & Astrophys. Rev.* **10**, 313 (2002).
- [14] K. Shibata, *Astrophys. Space Sci.* **264**, 129 (1999).
- [15] P. A. Isenberg, T. G. Forbes und P. Démoulin, *Astrophys. J.* **417**, 386 (1993).
- [16] T. Sakurai, *Publ. Astron. Soc. Japan* **31**, 209 (1979).
- [17] J. Chen, *Space Sci. Rev.* **95**, 165 (2001).
- [18] J. A. Klimchuk, in *Space Weather*, Edn. P. Song, H. J. Singer und G. L. Siscoe, AGU, Washington, 143 (2001).
- [19] Z. Mikić und J. A. Linker, *Astrophys. J.* **430**, 898 (1994).
- [20] T. Amari, J. F. Luciani, J. J. Aly und M. Tagger, *Astron. & Astrophys.* **306**, 913 (1996).
- [21] J. J. Aly, *Astrophys. J.* **375**, L61 (1991).
- [22] P. A. Sturrock, *Astrophys. J.* **380**, 655 (1991).

- [23] S. K. Antiochos, C. R. DeVore und J. A. Klimchuk, *Astrophys. J.* **510**, 485 (1999).
- [24] G. Aulanier, E. E. DeLuca, S. K. Antiochos, et al., *Astrophys. J.* **540**, 1126 (2000).
- [25] T. Amari, J. F. Luciani, J. J. Aly, Z. Mikić und J. Linker, *Astrophys. J.* **585**, 1073 (2003).
- [26] I. I. Roussev, T. G. Forbes, T. I. Gombosi, et al., *Astrophys. J.* **588**, L45 (2003).
- [27] T. Amari, J. F. Luciani, J. J. Aly und M. Tagger, *Astrophys. J.* **466**, L39 (1996).
- [28] T. Amari und J. F. Luciani, *Astrophys. J.* **515**, L81 (1999).
- [29] T. Amari, J. F. Luciani, Z. Mikić und J. A. Linker, *Astrophys. J.* **529**, L49 (2000).
- [30] R. L. Moore, A. C. Sterling, H. S. Hudson und J. R. Lemen, *Astrophys. J.* **552**, 833 (2001).
- [31] A. Hundhausen, in *The Many Faces of the Sun*, Edn. K. T. Strong, J. L. R. Saba, B. M. Haisch und J. T. Schmelz, Springer, New York, 143 (1999).
- [32] E. R. Priest, *Solar Magnetohydrodynamics*, D. Reidel Publishing Company, Dodrecht (1982).
- [33] D. Biskamp, *Nonlinear Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [34] T. J. M. Boyd und J. J. Sanderson, *Plasma Dynamics*, Nelson, London (1969).
- [35] N. A. Krall und A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, San Francisco Press Inc., San Francisco (1986).
- [36] E. R. Priest, in *Physics of Magnetic Flux Ropes*, Edn. C. T. Russell, E. R. Priest und L. C. Lee, AGU, Washington, 1 (1990).
- [37] T. Gold und F. Hoyle, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **120**, 89 (1960).
- [38] R. A. M. Van der Linden und A. W. Hood, *Astron. & Astrophys.* **346**, 303 (1999).
- [39] G. Einaudi, in *Physics of Magnetic Flux Ropes*, Edn. C. T. Russell, E. R. Priest und L. C. Lee, AGU, Washington, 43 (1990).
- [40] A. W. Hood, *Plasma Phys. & Contr. Fusion* **34**, 411 (1992).
- [41] A. W. Hood und E. R. Priest, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **17**, 297 (1981).
- [42] M. D. Kruskal, J. L. Johnson, M. B. Gottlieb und L. M. Goldman, *Phys. Fluids* **1**, 421 (1958).
- [43] V. D. Shafranov, *J. Nucl. Energy II* **5**, 86 (1957).

- [44] G. Einaudi und G. van Hoven, *Sol. Phys.* **88**, 163 (1983).
- [45] M. Velli, G. Einaudi und A. W. Hood, *Astrophys. J.* **350**, 428 (1990).
- [46] Z. Mikić, D. D. Schnack und G. van Hoven, *Astrophys. J.* **361**, 690 (1990).
- [47] H. Baty und J. Heyvaerts, *Astron. & Astrophys.* **308**, 935 (1996).
- [48] H. Baty, *Sol. Phys.* **172**, 249 (1997).
- [49] K. Galsgaard und Åke Nordlund, *J. Geophys. Res.* **102**, 219 (1997).
- [50] R. Lionello, M. Velli, G. Einaudi und Z. Mikić, *Astrophys. J.* **494**, 840 (1998).
- [51] H. Baty, *Astron. & Astrophys.* **367**, 321 (2001).
- [52] C. L. Gerrard, T. D. Arber, A. W. Hood und R. A. M. van der Linden, *Astron. & Astrophys.* **373**, 1089 (2001).
- [53] C. L. Gerrard, T. D. Arber und A. W. Hood, *Astron. & Astrophys.* **387**, 687 (2002).
- [54] J. A. Klimchuk, S. K. Antiochos und D. Norton, *Astrophys. J.* **542**, 504 (2000).
- [55] G. van Hoven, Y. Mok und Z. Mikić, *Astrophys. J.* **440**, L105 (1995).
- [56] M. Tokman und P. M. Bellan, *Astrophys. J.* **567**, 1202 (2002).
- [57] P. Kempf, *Astron. Nachr.* **185**, 197 (1910).
- [58] A. Hofmann, J. Rendtel, H. Aurass und B. Kalman, *Sol. Phys.* **108**, 151 (1987).
- [59] P. N. Brandt, G. B. Scharmer, S. Ferguson, et al., *Nature*, **335**, 238 (1988).
- [60] D. S. Brown, R. W. Nightingale, D. Alexander, et al., *Sol. Phys.* **216**, 79 (2003).
- [61] B. W. Lites, B. C. Low, V. Martinez Pillet, et al., *Astrophys. J.* **446**, 877 (1995).
- [62] K. D. Leka, R. C. Canfield, A. N. McClymont und L. van Driel-Gesztelyi, *Astrophys. J.* **462**, 547 (1996).
- [63] A. A. Pevtsov, R. C. Canfield und H. Zirin, *Astrophys. J.* **473**, 533 (1996).
- [64] L. van Driel-Gesztelyi, P. K. Manoharan, P. Démoulin, et al., *J. Atmospheric & Solar Terr. Phys.* **62**, 1437 (2000).
- [65] B. Vršnak, J. Magdalenić, H. Aurass und G. Mann, *Astron. & Astrophys.* **396**, 673 (2002).
- [66] M. Ugai und T. Tsuda, *J. Plasma Phys.* **17**, 337 (1977).
- [67] T. Sato und T. Hayashi, *Phys. Fluids* **22**, 1189 (1979).

- [68] P. A. Sturrock, *Plasma Physics*, Kap. 13.4, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [69] T. Amari, J. F. Luciani, J. J. Aly und Z. Mikić, in *Coronal Mass Ejections*, Edn. N. Crooker, J. A. Joselyn und J. Feynman, AGU, Washington, 101 (1997).
- [70] P. A. Sturrock, S. K. Antiochos und G. Roumeliotis, *Astrophys. J.* **443**, 804 (1995).
- [71] A. A. Pevtsov, R. C. Canfield und A. N. McClymont, *Astrophys. J.* **481**, 973 (1997).
- [72] N. Seehafer, *Sol. Phys.* **125**, 219 (1990).
- [73] A. A. Pevtsov, R. C. Canfield und T. R. Metcalf, *Astrophys. J.* **440**, L109 (1995).
- [74] V. S. Titov und P. Démoulin, *Astron. & Astrophys.* **351**, 707 (1999).
- [75] T. Magara und D. W. Longcope, *Astrophys. J.* **559**, L55 (2001).
- [76] T. Török und B. Kliem, in *Solar Variability: From Core to Outer Frontiers*, Ed. A. Wilson, ESA SP-506, 781 (2002).
- [77] G. Bateman, *MHD Instabilities*, MIT Press, Cambridge (1978).
- [78] V. S. Titov, G. Hornig und P. Démoulin, *J. Geophys. Res.* **107**, doi:10.1029/2001JA000278 (2002).
- [79] F. Chiuderi-Drago, N. Mein und M. Pick, *Sol. Phys.* **103**, 235 (1986).
- [80] S. F. Martin, *Sol. Phys.* **182**, 107 (1998).
- [81] N. Seehafer, *Sol. Phys.* **105**, 223 (1986).
- [82] V. S. Titov, E. R. Priest und P. Démoulin, *Astron. & Astrophys.* **276**, 564 (1993).
- [83] M. G. Linton, G. H. Fisher, R. B. Dahlburg und Y. Fan, *Astrophys. J.* **522**, 1190 (1999).
- [84] P. K. Manoharan, L. van Driel-Gesztelyi, M. Pick und P. Démoulin, *Astrophys. J.* **468**, L73 (1996).
- [85] H. Aurass, B. Vršnak, A. Hofmann und V. Rudžjak, *Sol. Phys.* **190**, 267 (1999).
- [86] Y. Fan und S. E. Gibson, *Astrophys. J.* **589**, L105 (2003).
- [87] A. A. Pevtsov, *Sol. Phys.* **207**, 111 (2002).
- [88] B. Vršnak, V. Ruždjak und B. Rompolt, *Sol. Phys.* **136**, 151 (1991).
- [89] D. Alexander, T. R. Metcalf und N. Nitta, *Geophys. Res. Lett.* **29**(10), 1403 (2002).
- [90] M. R. Kundu, S. M. White, V. I. Garaimov, et al., *Astrophys. J.* **607**, 530 (2004).

- [91] G. Tóth, *Computational Magnetohydrodynamics – Notes for an introductory level course*, <http://hermes.elte.hu/~gtoth/>.
- [92] R. D. Richtmyer und K. W. Morton, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Wiley-Interscience, New York (1967).
- [93] G. A. Dulk und D. J. McLean, *Sol. Phys.* **57**, 279 (1978).
- [94] F. Weller, *Numerische Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Vieweg, Braunschweig (1996).
- [95] P. J. Roache, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque (1972).

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand am Astrophysikalischen Institut Potsdam und während meines Aufenthaltes als Gast der Sonnenphysikgruppe der Universität von St. Andrews (Schottland). Sie wurde durch Mittel des DLR im Rahmen des Projekts 01 OC 9706 4 und durch die EU-Zuwendung No. HPRN-CT-2000-00153, PLATON, finanziert. Die zur Ausführung der numerischen Simulationen erforderlichen Computerressourcen wurden vom John von Neumann-Institut für Computing (NIC) des Forschungszentrums Jülich GmbH und vom Astrophysikalischen Institut Potsdam zur Verfügung gestellt.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. B. Kliem für die intensive Betreuung meiner Arbeit. Er stand mir stets mit Vorschlägen in vielen lebhaften Diskussionen hilfreich beiseite. Herrn Prof. J. Staude danke ich für die Übernahme der Betreuung meiner Arbeit. Mein weiterer Dank gilt Dr. T. Neukirch für die freundliche Unterstützung während meines Aufenthaltes in St. Andrews sowie den Mitgliedern der Sonnenphysikgruppen in Potsdam und St. Andrews für ihre Hilfsbereitschaft. Dankend erwähnen möchte ich an dieser Stelle auch die Zusammenarbeit mit Dr. V. S. Titov von der Ruhr-Universität Bochum sowie zahlreiche Diskussionen mit vielen Kollegen im In- und Ausland.

Korrekturen

S. 79, 6. Zeile von unten:	$7.550 \times 10^{24} J$	statt	$1.0 \times 10^{26} J$.
S. 79, 1. Zeile von unten:	ca. $8.154 \times 10^{25} J$	statt	$\sim 10^{27} J$.
S. 84, 4. Zeile von unten:	$2.794 \times 10^{25} J$	statt	$3.5 \times 10^{26} J$.
S. 85, 3. Zeile von oben:	$1.211 \times 10^{26} J$	statt	$1.5 \times 10^{27} J$.
S. 89, 9. Zeile von unten:	$5.864 \times 10^{25} J$	statt	$7 \times 10^{26} J$.
S. 89, 5. Zeile von unten:	$1.759 \times 10^{26} J$	statt	$2 \times 10^{27} J$.